Analisis Real

KISTOSIL FAHIM

March 5, 2025

Daftar Isi

Daftar Gambar

DAFTAR GAMBAR

Daftar Tabel

Bab 1 Integral Riemann

1.1 Integral Riemann: Definisi

Dalam baian ini akan diikuti prosedur yang umum digunakan dalam matakuliah kalkulus untuk mendefinisikan integral Riemann yaitu merupakan limit dari jumlah Riemann ketika panjang partisi terbesar mendekati nol. Karena diasumsikan bahwa pembaca telah familiar-setidaknya secara informal-dengan integral dari mata kuliah kalkulus, disubbab ini tidak akan diberikan motivasi tentang integral tersebut, atau membahas interpretasinya sebagai "luas di bawah grafik," atau aplikasinya dalam fisika, teknik, ekonomi, dan sebagainya. Sebaliknya, akan fokus pada aspek matematis murni dari integral tersebut.

Pertama-tama definisikan beberapa istilah dasar yang akan sering digunakan.

1.1.1 Partisi dan Partisi Bertanda

Jika $I := [a, b]$ adalah interval tertutup terbatas di $\mathbb{R}$, maka **partisi dari** I adalah himpunan hingga terurut

$$\mathcal{P} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

dari titik-titik dalam I sehingga

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Titik-titik dalam $\mathcal{P}$ digunakan untuk membagi $I = [a, b]$ menjadi subinterval-subinterval yang tidak saling tumpang tindih:

$$I_1 := [x_0, x_1], \quad I_2 := [x_1, x_2], \ldots, \quad I_n := [x_{n-1}, x_n].$$

Lebih lanjut, sering dinotasikan juga partisi $\mathcal{P}$ oleh $\mathcal{P} := \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ dan **norm (atau mesh) dari** $\mathcal{P}$ didefinisikan sebagai:

$$\|\mathcal{P}\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Jika sebuah titik x_i^* telah dipilih dari setiap subinterval $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, maka titik-titik tersebut disebut sebagai **tag/tanda** dari subinterval I_i. Himpunan pasangan terurut

$$\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], x_i^*)\}_{i=1}^n$$

dari subinterval-subinterval dan tanda yang sesuai disebut sebagai **partisi bertanda** dari I.

Jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah partisi bertanda yang diberikan di atas, maka **jumlah Riemann** suatu fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sesuai dengan $\dot{\mathcal{P}}$ didefinisikan sebagai:

$$\mathcal{S}(f, \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Amati bahwa jika fungsi f positif pada $[a, b]$, maka jumlah Riemann $\mathcal{S}(f, \dot{\mathcal{P}})$ adalah jumlah dari luas n persegi panjang yang lebarnya adalah $x_i - x_{i-1}$ dan panjangnya adalah $f(x_i^*)$.

1.1.2 Definisi Integral Riemann

Sekarang didefinisikan integral Riemann dari suatu fungsi f pada interval $[a, b]$.

Definisi 1.1

Fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan **terintegral Riemann** pada $[a, b]$ jika terdapat suatu bilangan $L \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta_\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, maka

$$\left|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) - L\right| < \varepsilon.$$

Himpunan semua fungsi yang terintegral Riemann pada $[a, b]$ dinotasikan sebagai $\mathcal{R}[a, b]$.

Pada Teorema selanjutnya diberikan bahwa jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$, maka nilai L dapat diperoleh secara tunggal dan disebut sebagai integral Riemann dari f pada $[a, b]$. Sebagai pengganti L, biasanya ditulis

$$L = \int_a^b f \quad \text{atau} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Harus dipahami bahwa huruf apa pun selain x dapat digunakan dalam ekspresi terakhir, selama tidak menimbulkan ambiguitas.

Teorema 1.1

Jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$, maka nilai integralnya tunggal.

Bukti. Misalkan L_1 dan L_2 adalah nilai dari integral Riemann dari fungsi f dan ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Berdasarkan definisi dari integral Riemann didapatkan $\delta_{\varepsilon/2,1} > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}_1$ adalah partisi bertanda dengan $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta_{\varepsilon/2,1}$, maka

$$\left|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}_1) - L_1\right| < \varepsilon/2.$$

Juga terdapat $\delta_{\varepsilon/2,2} > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}_2$ adalah partisi bertanda dengan $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta_{\varepsilon/2,2}$, maka

$$\left|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}_2) - L_2\right| < \varepsilon/2.$$

Sekarang ambil $\delta := \min\{\delta_{\varepsilon/2,1}, \delta_{\varepsilon/2,2}\} > 0$ dan pilih partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}}$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$. Karena $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_{\varepsilon/2,1}$ dan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_{\varepsilon/2,2}$, maka

$$\left|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) - L_1\right| < \varepsilon/2 \quad \text{dan} \quad \left|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) - L_2\right| < \varepsilon/2.$$

Sehingga dengan menggunakan Ketaksamaan Segitiga diperoleh bahwa

$$|L_1 - L_2| = \left|L_1 - S(f;\dot{\mathcal{P}}) + S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_2\right| \leq \left|L_1 - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}})\right| + \left|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_2\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka diperoleh $L_1 = L_2$.

■

Teorema 1.2

Jika g dapat diintegralkan secara Riemann pada $[a, b]$ dan jika $f(x) = g(x)$ kecuali pada sejumlah titik berhingga di $[a, b]$, maka f juga dapat diintegralkan secara Riemann dan

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Bukti. Pada bagian ini akan dibuktikan bahwa jika n bilangan asli dan $a_1, a_2, \cdots, a_n$ adalah n titik berbeda pada $[a, b]$ sehingga

$$f(x) \begin{cases} \neq g(x), & x \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \\ = g(x), & x \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \end{cases}$$

maka

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Metode pembuktian yang digunakan adalah induksi matematika. Sekarang mulai dengan validasi untuk $n = 1$, yakni dimisalkan $f(x) = g(x)$ kecuali untuk $x \neq a_1$. Untuk setiap partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], x_i^*)\}_{i=1}^n$, suku-suku dalam kedua jumlah $\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}})$ dan $\mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}})$ sama kecuali pada paling banyak dua titik. Sekarang perhatikan beberapa kondisi berikut yang mungkin terjadi:

Kondisi 1 Tidak ada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ sehingga $x_j^* = a_1$

Pada kondisi ini didaptakan

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}})| = \left|\sum_{i=1}^n (f(x_i^*) - g(x_i^*))(x_i - x_{i-1})\right| = 0.$$

Kondisi 2 Ada tepat satu $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ sehingga $x_j^* = a_1$

Pada kondisi ini didaptakan

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^n (f(x_i) - g(x_i))(x_i - x_{i-1})\right| = |(f(a_1) - g(a_1))(x_j - x_{j-1})| \\ &\leq |f(a_1) - g(a_1)|\,|x_j - x_{j-1}| \leq |f(a_1) - g(a_1)|\,\|\dot{\mathcal{P}}\|. \end{aligned}$$

Terapkan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}})| \leq (|f(a_1)| + |g(a_1)|)\,\|\dot{\mathcal{P}}\|.$$

Kondisi 3 Ada tepat satu $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ sehingga $x_j^* = x_{j+1}^* = c$: ini terjadi pada saat a_1 adalah titik ujung pada subinterval yakni $a_1 = x_j$ untuk suatu $j \geq 1$ dan pilih tanda $a_1 = x_i^* = x_{i+1}^*$

Pada kondisi ini didaptakan

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(f(x_i^*) - g(x_i^*))(x_i - x_{i-1})\right| \\
&= |(f(a_1) - g(a_1))(x_j - x_{j-1}) + (f(a_1) - g(a_1))(x_{j+1} - x_j)| \\
&\leq |f(a_1) - g(a_1)|\,|x_j - x_{j-1}| + |f(a_1) - g(a_1)|\,|x_{j+1} - x_j| \\
&\leq 2\,|f(a_1) - g(a_1)|\,\|\dot{\mathcal{P}}\|.
\end{aligned}$$

Terapkan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}})| \leq 2\,(|f(a_1)| + |g(a_1)|)\,\|\dot{\mathcal{P}}\|.$$

Berdasarkan ketiga kondisi di atas didapatkan

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}})| \leq 2\,(|f(a_1)| + |g(a_1)|)\,\|\dot{\mathcal{P}}\|.$$

Sekarang, dimisalkan $L = \int_a^b g$ dan ambil sebarang $\varepsilon > 0$, kemudian pilih $\delta_1 > 0$ sehingga $\delta_1 < \varepsilon/(4(|f(a_1)| + |g(a_1)|))$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga jika $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_2$ maka $|\mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon/2$. Selanjutnya, ambil $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ dan $\dot{\mathcal{P}}$ yang memenuhi $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_2$ $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, didapatkan

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| &\leq |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}})| + |\mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}}) - L| \\
&< 2\,(|f(a_1)| + |g(a_1)|)\,\|\dot{\mathcal{P}}\| + \varepsilon/2 < 2\,(|f(a_1)| + |g(a_1)|)\,\delta_1 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, fungsi f dapat diintegralkan dengan nilai integral L. Selanjutnya asumsikan bahwa pernyataan benar untuk $n = k$ dan perlu memvalidasi bahwa jika

$$f(x)\begin{cases} \neq g(x), & x \in \{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\} \\ = g(x), & x \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\} \end{cases}$$

maka $\int_a^b f = \int_a^b g$. Pertama didefinisikan

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \\ g(x), & x \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \end{cases}$$

dan berdasarkan asumsi induksi matematika yaitu pernyataan benar untuk $n = k$, diperoleh $\int_a^b \tilde{g} = \int_a^b g$. Selanjutnya amati bahwa $f(x) = \tilde{g}(x)$ kecuali untuk $x \neq a_{k+1}$, yang artinya berdasarkan hasil sebelumnya didapatkan $\int_a^b \tilde{g} = \int_a^b f$. Sehingga bisa disimpulkan $\int_a^b f = \int_a^b g$.

■

Jika hanya digunakan definisi, untuk menunjukkan bahwa suatu fungsi f dapat diintegralkan secara Riemann, haruslah (i) diketahui (atau menebak dengan benar) nilai L dari integral, dan (ii) dikonstruksi δ yang bergantung pada sebarang $\varepsilon > 0$. Penentuan L kadang dilakukan dengan menghitung jumlah Riemann dan menebak nilai L. Penentuan δ biasanya sulit dilakukan.

Dalam praktiknya, biasanya untuk menunjukkan bahwa $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dengan menggunakan beberapa teorema yang akan diberikan nanti.

Contoh 1.1

Buktikan bahwa setiap fungsi konstan f pada $[a,b]$ termasuk dalam $\mathcal{R}[a,b]$ dan $\int_a^b f = c(b-a)$..

Penyelesaian: Misalkan $f(x) = c$ untuk semua $x \in [a,b]$. Jika $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], x_i^*)\}_{i=1}^n$ adalah suatu partisi bertanda pada $[a,b]$, maka jelas bahwa

$$\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b-a).$$

Dengan demikian, untuk sebarang $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $\delta = 1$ sehingga jika $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, maka

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - (k(b-a))| = 0 < \varepsilon.$$

Karena ε sebarang, bisa disimpulkan bahwa $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan

$$\int_a^b f = c(b-a).$$

Contoh 1.2

Misalkan $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh

$$g(x) := \begin{cases} 3, & x \in [0,1], \\ 4. & x \in (1,4]. \end{cases}$$

Buktikan bahwa $g \in \mathcal{R}[0,4]$ dan

$$L := \int_0^3 g = 15.$$

Penyelesaian: Pertama, misalkan $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], x_i^*)\}_{i=1}^n$ adalah partisi bertanda dari

$[0,4]$ dengan norm $< \delta$; akan ditunjukkan cara menentukan $\delta = \delta(\varepsilon)$ yang bergantung pada ε agar $|\mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}}) - 15| < \varepsilon$. Pada contoh ini perlu dilihat untuk beberapa kondisi:

Kondisi 1: Ada m sehingga $x_m = 1$

Pada kondisi ini bisa langsung dihitung

$$\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{m} 3(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+1}^{n} 4(x_i - x_{i-1}) = 3(x_m - x_0) + 4(x_n - x_m) = 15.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - (k(b-a))| = 0.$$

Kondisi 2: Ada m sehingga $x_m < 1 < x_{m+1}$ dan $x^*_{m+1} \leq 1$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
15 &= 3(1-0) + 4(4-1) \\
&= 3(1 - x_m + x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_1 - x_0) \\
&\quad +4(x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \cdots + x_{m+2} - x_{m+1} + x_{m+1} - 1) \\
&= 3(1 - x_m) + 3(x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_1 - x_0) \\
&\quad +4(x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \cdots + x_{m+2} - x_{m+1}) + 4(x_{m+1} - 1) \\
&= 3(1 - x_m) + 4(x_{m+1} - 1) + \sum_{i=1}^{m} 3(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+2}^{n} 4(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - 15| \\
&= \left| \left[\sum_{i=1}^{m+1} 3(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+2}^{n} 4(x_i - x_{i-1}) \right] - 15 \right| \\
&= \left| \left[\sum_{i=1}^{m} 3(x_i - x_{i-1}) + 3(x_{m+1} - x_m) + \sum_{i=m+2}^{n} 4(x_i - x_{i-1}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[3(1 - x_m) + 4(x_{m+1} - 1) + \sum_{i=1}^{m} 3(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+2}^{n} 4(x_i - x_{i-1}) \right] \right| \\
&= |3(x_{m+1} - x_m) - 3(1 - x_m) - 4(x_{m+1} - 1)| \\
&= |-(x_{m+1} - 1)| < \delta.
\end{aligned}$$

Kondisi 3: Ada m sehingga $x_m < 1 < x_{m+1}$ dan $x^*_{m+1} > 1$

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - 15|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \left[\sum_{i=1}^{m} 3(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+1}^{n} 4(x_i - x_{i-1}) \right] - 15 \right| \\
&= \left| \left[\sum_{i=1}^{m} 3(x_i - x_{i-1}) + 4(x_{m+1} - x_m) + \sum_{i=m+2}^{n} 4(x_i - x_{i-1}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[3(1 - x_m) + 4(x_{m+1} - 1) + \sum_{i=1}^{m} 3(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+2}^{n} 4(x_i - x_{i-1}) \right] \right| \\
&= |4(x_{m+1} - x_m) - 3(1 - x_m) - 4(x_{m+1} - 1)| \\
&= |(1 - x_m)| < \delta.
\end{aligned}
$$

Dengan melihat hasil pada Kondisi 1, Kondisi 2 dan Kondisi 3 di atas diperoleh

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - 15| < \delta.$$

Sekarang pilih $\delta \leq \varepsilon$ didapatkan

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - 15| < \varepsilon.$$

Dengan demikian, ditemukan bahwa $|\mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}}) - 15| < \varepsilon$ ketika $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ dengan $\delta \leq \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, ini telah membuktikan bahwa $g \in \mathcal{R}[0,4]$, dan bahwa $\int_0^4 g = 15$, sebagaimana yang diinginkan.

Contoh 1.3

Misalkan $h(x) := x$ untuk $x \in [0,1]$; akan ditunjukkan bahwa $h \in \mathcal{R}[0,1]$ dengan $\int_0^1 h = \frac{1}{2}$.

Penyelesaian: Misalkan $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], x_i^*)\}_{i=1}^n$ adalah partisi bertanda dari $[0,1]$ dengan norm $< \delta$; akan ditunjukkan cara menentukan $\delta = \delta(\varepsilon)$ yang bergantung pada ε agar $|\mathcal{S}(h;\dot{\mathcal{P}}) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. Pertama, perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) \\
&= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_{n-1}^2 + x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2 + \cdots + x_1^2 - x_0^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h(q_i)(x_i - x_{i-1})$$

dengan $q_i := \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) \in [x_{i-1}, x_i]$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(h; \dot{\mathcal{P}}) - \frac{1}{2}| &= \left| \sum_{i=1}^{n} h(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} h(q_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i^* - q_i|(x_i - x_{i-1}) \leq \delta \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \delta \cdot 1 = \delta. \end{aligned}$$

Dengan demikian, dengan memilih $\delta := \varepsilon$, maka dapat ditelusuri kembali argumen untuk menyimpulkan bahwa $h \in \mathcal{R}[0,1]$ dan $\int_0^1 h = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

1.1.3 Sifat-sifat Integral

Kesulitan dalam menentukan nilai integral dan δ menunjukkan bahwa akan sangat berguna untuk memiliki beberapa teorema umum. Hasil pertama dalam arah ini memungkinkan membentuk kombinasi aljabar tertentu dari fungsi-fungsi yang dapat diintegralkan.

Teorema 1.3

Misalkan f dan g adalah fungsi dalam $\mathcal{R}[a,b]$. Diperoleh

(a) *Jika $k \in \mathbb{R}$, fungsi kf termasuk dalam $\mathcal{R}[a,b]$ dan*

$$\int_a^b kf = k \int_a^b f.$$

(b) *Fungsi $f + g$ termasuk dalam $\mathcal{R}[a,b]$ dan*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(c) *Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$, maka*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Bukti. Jika $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ adalah partisi bertanda dari $[a,b]$, maka mudah untuk menunjukkan bahwa

$$\mathcal{S}(kf; \mathcal{P}) = k\mathcal{S}(f; \mathcal{P}), \quad \mathcal{S}(f+g; \mathcal{P}) = \mathcal{S}(f; \mathcal{P}) + \mathcal{S}(g; \mathcal{P}),$$

$$\mathcal{S}(f; \mathcal{P}) \leq \mathcal{S}(g; \mathcal{P}).$$

Diserahkan kepada pembaca untuk menunjukkan bahwa pernyataan (a) mengikuti dari persamaan pertama. Sebagai contoh, berikut diberikan pembuktian bagian (b) dan (c) secara lengkap.

Diberikan $\varepsilon > 0$, akan digunakan argumen dalam pembuktian Teorema Keunikan 1.1 untuk membangun sebuah bilangan $\delta_{\varepsilon/2} > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah partisi bertanda dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_{\varepsilon/2}$, maka kedua kondisi berikut berlaku:

$$\left|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| < \varepsilon/2, \quad \left|\mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b g\right| < \varepsilon/2. \tag{1.1}$$

Untuk membuktikan (b), perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{S}(f+g;\dot{\mathcal{P}}) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right)\right| &= \left|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) + \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f - \int_a^b g\right| \\ &\leq \left|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| + \left|\mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b g\right| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ bersifat sembarang, bisa disimpulkan bahwa $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ dan integralnya merupakan jumlah dari integral f dan g.

Untuk membuktikan (c), perhatikan bahwa penerapan ketaksamaan (1.1) memberikan

$$\int_a^b f - \varepsilon/2 < \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}), \quad \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}}) < \int_a^b g + \varepsilon/2.$$

Jika digunakan fakta bahwa $\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) \leq \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}})$, maka diperoleh

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g + \varepsilon.$$

Namun, karena $\varepsilon > 0$ bersifat sembarang, bisa simpulkan bahwa

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

■

1.1.4 Teorema Keterbatasan

Sekarang akan ditunjukkan bahwa fungsi yang tidak terbatas tidak dapat diintegralkan Riemann.

Teorema 1.4

Jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$, maka f terbatas pada $[a,b]$.

Bukti. Misalkan f adalah fungsi yang tidak terbatas dalam $\mathcal{R}[a,b]$ dengan integral L. Maka ada $\delta > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah partisi bertanda dari $[a,b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, maka berlaku

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < 1,$$

yang menyiratkan bahwa

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}})| < |L| + 1. \tag{1.2}$$

Sekarang, misalkan $\mathcal{Q} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi dari $[a,b]$ dengan $||\mathcal{Q}|| < \delta$. Karena $|f|$ tidak terbatas pada $[a,b]$, maka ada setidaknya satu subinterval dalam $\mathcal{Q}$, misalnya $[x_{k-1}, x_k]$, di mana $|f|$ tidak terbatas—karena jika $|f|$ terbatas pada setiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ oleh M_i, maka f terbatas pada $[a,b]$ oleh $\max\{M_1, \ldots, M_n\}$.

Sekarang pilih tanda untuk $\mathcal{Q}$ yang akan memberikan kontradiksi terhadap (1.2). Beri tanda $\mathcal{Q}$ dengan $t_i := x_i$ untuk $i \neq k$ dan pilih $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sehingga

$$|f(t_k)(x_k - x_{k-1})| > |L| + 1 + \left|\sum_{i\neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right|.$$

Dari Ketidaksamaan Segitiga (dalam bentuk $|A + B| \geq |A| - |B|$), diperoleh

$$|\mathcal{S}(f;\mathcal{Q})| \geq |f(t_k)(x_k - x_{k-1})| - \left|\sum_{i\neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| > |L| + 1,$$

yang bertentangan dengan (*). ■

Bagian ini ditutup dengan sebuah contoh fungsi yang tidak kontinu di setiap bilangan rasional dan tidak monoton, tetapi tetap dapat diintegralkan dalam pengertian Riemann.

1.1.5 Latihan

1. Jika $I := [0,4]$, hitung norm dari partisi berikut:
   (a) $\mathcal{P}_1 := (0, 1, 2, 4)$,
   (b) $\mathcal{P}_2 := (0, 2, 3, 4)$,
   (c) $\mathcal{P}_3 := (0, 1, 1.5, 2, 3, 4, 4)$,
   (d) $\mathcal{P}_4 := (0.5, 2.5, 3.5, 4)$.
2. Jika $f(x) := x^2$ untuk $x \in [0,4]$, hitung jumlah Riemann berikut, di mana $\mathcal{P}_i$ memiliki titik partisi seperti pada Latihan 1, dan tanda dipilih sebagaimana diberikan sebagai berikut:
   (a) $\mathcal{P}_1$ dengan tanda di titik kiri subinterval.
   (b) $\mathcal{P}_1$ dengan tanda di titik kanan subinterval.
   (c) $\mathcal{P}_2$ dengan tanda di titik kiri subinterval.

(d) $\mathcal{P}_2$ dengan tanda di titik kanan subinterval.

3. **(a)** Misalkan $f(x) = 2$ jika $0 \le x < 1$ dan $f(x) = 1$ jika $1 \le x \le 2$. Tunjukkan bahwa $f \in \mathcal{R}[0,2]$ dan hitung integralnya.

   (b) Misalkan $h(x) = 2$ jika $0 \le x < 1$, $h(1) = 3$, dan $h(x) = 1$ jika $1 < x \le 2$. Tunjukkan bahwa $h \in \mathcal{R}[0,2]$ dan hitung integralnya.

4. Gunakan Induksi Matematika dan Teorema 1.3 untuk menunjukkan bahwa jika $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, maka kombinasi linear $f = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i$ termasuk $\mathcal{R}[a,b]$ dan
$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} k_i \int_a^b f_i.$$

5. Jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $|f(x)| \le M$ untuk semua $x \in [a,b]$, tunjukkan bahwa
$$\left| \int_a^b f \right| \le M(b-a).$$

6. Jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $(\mathcal{P}_n)$ adalah urutan partisi bertanda dari $[a,b]$ sehingga $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$, buktikan bahwa
$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(f;\mathcal{P}_n).$$

7. Misalkan f terbatas pada $[a,b]$ dan ada dua urutan partisi bertanda dari $[a,b]$ sehingga $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$ dan $\|\mathcal{Q}_n\| \to 0$, tetapi
$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(f;\mathcal{P}_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(f;\mathcal{Q}_n).$$
Tunjukkan bahwa $f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

8. Misalkan $c \le d$ adalah titik-titik dalam $[a,b]$. Jika $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ memenuhi $\varphi(x) = \alpha > 0$ untuk $x \in [c,d]$ dan $\varphi(x) = 0$ di tempat lain dalam $[a,b]$, buktikan bahwa $\varphi \in \mathcal{R}[a,b]$ dan bahwa
$$\int_a^b \varphi = \alpha(d-c).$$
(Petunjuk: Diberikan $\varepsilon > 0$, ambil $\delta = \varepsilon/4\alpha$ dan tunjukkan bahwa jika $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, maka dimiliki
$$\alpha(d-c-2\delta) \le \mathcal{S}(\varphi;\dot{\mathcal{P}}) \le \alpha(d-c+2\delta).$$

9. Misalkan $0 \le a < b$, $Q(x) := x^2$ untuk $x \in [a,b]$, dan $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ menjadi partisi dari $[a,b]$. Untuk setiap i, biarkan q_i menjadi akar kuadrat positif dari
$$\frac{1}{3}\left(x_{i-1}^2 + x_i^2 + x_{i-1}x_i\right).$$

   (a) Tunjukkan bahwa q_i memenuhi $0 \le x_{i-1} \le q_i \le x_i$.

   (b) Tunjukkan bahwa $Q(q_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{3}\left(x_i^3 - x_{i-1}^3\right)$.

(c) Jika $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah partisi bertanda dengan subinterval yang sama seperti $\mathcal{P}$ dan tanda q_i, tunjukkan bahwa

$$\mathcal{S}(Q;\dot{\mathcal{Q}}) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

(d) Tunjukkan bahwa $Q \in \mathcal{R}[a,b]$ dan

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

10. Jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $c \in \mathbb{R}$, didefinisikan g pada $[a+c, b+c]$ dengan $g(y) = f(y-c)$. Buktikan bahwa $g \in \mathcal{R}[a+c, b+c]$ dan bahwa

$$\int_{a+c}^{b+c} g = \int_a^b f.$$

1.2 Fungsi Terintegral Riemann

Pada subbab ini dimulai dengan pembuktian Kriteria Cauchy. Selanjutnya, dibuktikan Teorema Squeeze, yang akan digunakan untuk menetapkan keterintegralan Riemann dari beberapa kelas fungsi (fungsi tangga, fungsi kontinu, dan fungsi monoton). Terakhir, dibuktikan Teorema jumlahan.

Pada subbab sebelumnya dijelaskan bahwa untuk menggunakan definisi integral memerlukan pengetahuan tentang nilai integral. Kriteria Cauchy di bawah ini menghilangkan kebutuhan ini, tetapi dengan konsekuensi bahwa harus dipertimbangkan dua jumlah Riemann, bukan hanya satu.

Teorema 1.5 Kriteria Cauchy

Fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ anggota dari $\mathcal{R}[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\eta_\varepsilon > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ merupakan partisi bertanda atas $[a,b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta_\varepsilon$ dan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta_\varepsilon$, maka

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}})| < \varepsilon.$$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dengan nilai integral L. Berdasarkan definisi integral, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada $\eta_\varepsilon := \delta_{\varepsilon/2} > 0$ sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$, $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah partisi bertanda dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta_\varepsilon$ dan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta_\varepsilon$, maka

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon/2 \quad \text{dan} \quad |\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}}) - L| < \varepsilon/2.$$

Oleh karena itu, didapat

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}})| \le |\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| + |L - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}})| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$(\Leftarrow)$ Misalkan untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\eta_\varepsilon > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ merupakan partisi bertanda atas $[a,b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta_\varepsilon$ dan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta_\varepsilon$, maka $|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}})| < \varepsilon$.

Pilih $\varepsilon = 1/n$ dengan $n \in \mathbb{N}$ didapatkan bilangan positif $\eta_{1/n}$ sehingga jika dua partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ memenuhi $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta_{1/n}$ dan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta_{1/n}$, maka $|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}})| < 1/n$.

Selanjutnya didefinisikan barisan bilangan (δ_n) dengan $\delta_n := \min\{\eta_1, \eta_{1/2}, \ldots, \eta_{1/n}\}$. Perhatikan bahwa $\delta_n \geq \delta_{n+1}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dan jika dua partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ memenuhi $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_n$ dan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta_n$ maka $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta_{1/n}$ dan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta_{1/n}$ sehingga diperoleh $|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}})| < 1/n$.

Sekarang misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diberikan partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}}_n$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| < \delta_n$. Jelas, jika $m > n$ maka $\|\dot{\mathcal{P}}_m\| < \delta_m < \delta_n$ sehingga keduanya $\dot{\mathcal{P}}_m$ dan $\dot{\mathcal{P}}_n$ memiliki norm $< \delta_n$ dan diperoleh

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_m) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_n)| < 1/n \quad \text{untuk} \quad m > n. \tag{1.3}$$

Akibatnya, barisan $(\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_m))_{m=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy dalam $\mathbb{R}$. Oleh karena itu barisan ini konvergen di $\mathbb{R}$ dan bisa dimisalkan A adalah nilai konvergensinya yaitu $A := \lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_m)$.

Kemudian ambil limit pada (1.3) atas m, diperoleh

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_n) - A| \leq 1/n \quad \text{untuk semua} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Untuk melihat bahwa A adalah integral Riemann dari f, ambil sebarang $\varepsilon > 0$, dan pilih $K \in \mathbb{N}$ sehingga $K > 2/\varepsilon$. Jika $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah partisi bertanda dengan $\|\tilde{Q}\| < \delta_K$, maka

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}}) - A| \leq |\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}}) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_K)| + |\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_K) - A| \leq 1/K + 1/K < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, maka $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dengan integral A.

■

Contoh 1.4

Misalkan $g : [0,3] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang didefinisikan pada Contoh 1.2 yang diberikan oleh

$$g(x) := \begin{cases} 3, & x \in [0,1], \\ 4. & x \in (1,4]. \end{cases}$$

Buktikan bahwa $g \in \mathcal{R}[a,b]$.

Penyelesaian: Pada Contoh 1.2, bisa dilihat bahwa jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah partisi bertanda dari $[0,4]$ dengan norm $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta$, maka

$$15 - \eta \leq \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}}) \leq 15 + \eta.$$

Dengan demikian, jika $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah partisi bertanda lain dengan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta$, maka

$$15 - \eta \leq \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{Q}}) \leq 15 + \eta.$$

Jika kedua pertidaksamaan dikurangkan, diperoleh

$$|\mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(g;\dot{\mathcal{Q}})| \leq 2\eta.$$

Untuk membuat hasil akhir ini $< \varepsilon$, pilih $\eta < \varepsilon/2$. Sehingga berdasarkan Kriteria Cauchy diperoleh bahwa $g \in \mathcal{R}[0,4]$.

Kriteria Cauchy dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tidak dapat diintegralkan menurut Riemann. Untuk membuktikannya, perlu ditunjukkan bahwa: Ada $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap $\eta > 0$, terdapat partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta$ dan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta$ sehingga

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}})| \geq \varepsilon_0.$$

Contoh 1.5

Misalkan $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh

$$g(x) := \begin{cases} 1, & x \text{ bilangan rasional,} \\ 0. & x \text{ bilangan irasional.} \end{cases}$$

Buktikan bahwa $g \notin \mathcal{R}[a,b]$.

Penyelesaian: Ambil $\varepsilon_0 := \dfrac{1}{2}$ dan ambil sebarang $\eta > 0$ dan $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah dua partisi bertanda dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\|, \|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta$. Jika semua tanda dari $\dot{\mathcal{P}}$ adalah bilangan rasional maka $\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) = 1$, sedangkan jika semua tanda dari $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah bilangan irasional maka $\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}}) = 0$. Sehingga didapatkan

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{Q}})| \geq \varepsilon_0$$

dan oleh karena itu $g \notin \mathcal{R}[a,b]$.

1.2.1 Teorema Apit

Pada definisi integral Riemann, ada dua jenis kesulitan. Pertama, untuk setiap partisi, terdapat pilihan tanda yang tak terhingga banyaknya. Kedua, terdapat partisi-partisi tak terhingga yang memiliki norm kurang dari jumlah tertentu. Kita telah mengalami tantangan ini dalam contoh-contoh dan bukti-bukti teorema.

Sekarang, pada subbab ini diberikan sifat pentinguntuk membuktikan keterintegralan Riemann yang disebut **Teorema Apit**, yang akan memberikan sedikit bantuan dari kesulitan tersebut. Teorema ini menyatakan bahwa jika suatu fungsi dapat dibatasi diantara dua fungsi yang diketahui dapat diintegralkan menurut Riemann, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi tersebut juga dapat diintegralkan menurut Riemann. Kondisi-kondisi yang tepat diberikan dalam pernyataan teorema ini.

Teorema 1.6 Teorema Apit

Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi α_ε dan ω_ε dalam $\mathcal{R}[a, b]$ sehingga

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) \quad \text{untuk setiap } x \in [a, b],$$

dan

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Ambil $\alpha_\varepsilon = \omega_\varepsilon = f$ untuk setiap $\varepsilon > 0$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\varepsilon > 0$. Karena α_ε dan ω_ε berada dalam $\mathcal{R}[a, b]$, terdapat $\delta_\varepsilon > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah partisi bertanda dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, maka

$$\left|\mathcal{S}(\alpha_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b \alpha_\varepsilon\right| < \varepsilon \quad \text{dan} \quad \left|\mathcal{S}(\omega_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b \omega_\varepsilon\right| < \varepsilon.$$

Dari ketidaksamaan ini diperoleh bahwa

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < \mathcal{S}(\alpha_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}}) \quad \text{dan} \quad \mathcal{S}(\omega_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon.$$

Karena

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) \quad \text{untuk setiap } x \in [a, b],$$

diperoleh $\mathcal{S}(\alpha_\varepsilon; \mathcal{P}) \leq \mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) \leq \mathcal{S}(\omega_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}})$, sehingga

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < \mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon.$$

Jika $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah partisi bertanda lain dengan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta_\varepsilon$, maka juga berlaku

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < \mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{Q}}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon.$$

Jika kedua ketidaksamaan ini dikurangkan dan menggunakan asumsi bahwa

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) < \varepsilon,$$

diperoleh bahwa

$$|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{Q}})| < \int_a^b \omega_\varepsilon - \int_a^b \alpha_\varepsilon + 2\varepsilon = \int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) + 2\varepsilon < 3\varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang dan dengan menggunakan Kriteria Cauchy diperoleh bahwa $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

■

1.2.2 Kelas Fungsi Terintegral Riemann

Teorema Apit sering digunakan dalam kaitannya dengan kelas fungsi tangga. Dengan definisinya diberikan sebagai berikut.

Definisi 1.2

Suatu fungsi $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ disebut sebagai fungsi tangga jika $[a,b]$ merupakan gabungan dari sejumlah hingga interval yang tidak saling tumpang tindih $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sehingga s bernilai konstan pada setiap interval tersebut, yaitu:

$$s(x) = c_k \quad \text{untuk semua } x \in I_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dengan demikian, fungsi tangga hanya memiliki sejumlah hingga nilai yang berbeda. Sebagai contoh, fungsi $s : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai:

$$s(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Sebelum membahas mengenai fungsi tangga yang kaitannya dengan integral Riemann. Berikut diberikan definisi fungsi indikator dan kemudian diberikan lemma yang kaitannya dengan integral Riemann.

Definisi 1.3

Fungsi indikator dari suatu himpunan A, yang dilambangkan sebagai $\mathbb{1}_A$, adalah fungsi yang didefinisikan sebagai:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in A, \\ 0, & \text{jika } x \notin A. \end{cases}$$

☞ **Catatan 1.1**

Fungsi tangga pada Definisi 1.2 bisa dituliskan sebagai

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{I_k}(x).$$

Lema 1.1

Jika $g : [a, c] \to \mathbb{R}$ *didefinisikan oleh*

$$g(x) := \begin{cases} \alpha, & x \in [a, b], \\ \beta. & x \in (b, c], \end{cases}$$

dengan $a < b < c$, *maka* $g \in \mathcal{R}[a, c]$ *dan*

$$L := \int_a^c g = \alpha(b-a) + \beta(c-b).$$

Bukti. Pertama, misalkan $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], x_i^*)\}_{i=1}^n$ adalah partisi bertanda dari $[a, c]$ dengan norm $< \delta$; akan ditunjukkan cara menentukan $\delta = \delta(\varepsilon)$ yang bergantung pada ε agar $|\mathcal{S}(g; \dot{\mathcal{P}}) - (\alpha(b-a) + \beta(c-b))| < \varepsilon$. Pada contoh ini perlu dilihat untuk beberapa kondisi:

Kondisi 1: Ada m sehingga $x_m = b$

Pada kondisi ini bisa langsung dihitung

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) &= \sum_{i=1}^m \alpha(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+1}^n \beta(x_i - x_{i-1}) \\ &= \alpha(x_m - x_0) + \beta(x_n - x_m) \\ &= \alpha(b-a) + \beta(c-b). \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) - (\alpha(b-a) + \beta(c-b))| = 0.$$

Kondisi 2: Ada m sehingga $x_m < b < x_{m+1}$ dan $x_{m+1}^* \le b$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & (\alpha(b-a) + \beta(c-b)) \\ = \ & \alpha(b - x_m + x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_1 - x_0) \\ & + \beta(x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \cdots + x_{m+2} - x_{m+1} + x_{m+1} - b) \\ = \ & \alpha(b - x_m) + \alpha(x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_1 - x_0) \\ & + \beta(x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \cdots + x_{m+2} - x_{m+1}) + 4(x_{m+1} - b) \\ = \ & \alpha(b - x_m) + \beta(x_{m+1} - b) + \sum_{i=1}^m \alpha(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+2}^n \beta(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) - (\alpha(b-a) + \beta(c-b))|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \left[\sum_{i=1}^{m+1} \alpha(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+2}^{n} \beta(x_i - x_{i-1}) \right] - (\alpha(b-a) + \beta(c-b)) \right| \\
&= \Bigg| \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha(x_i - x_{i-1}) + \alpha(x_{m+1} - x_m) + \sum_{i=m+2}^{n} \beta(x_i - x_{i-1}) \right] \\
&\quad - \left[\alpha(b - x_m) + \beta(x_{m+1} - b) + \sum_{i=1}^{m} \alpha(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+2}^{n} \beta(x_i - x_{i-1}) \right] \Bigg| \\
&= |\alpha(x_{m+1} - x_m) - \alpha(1 - x_m) - \beta(x_{m+1} - 1)| \\
&= |(\alpha - \beta)(x_{m+1} - 1)| < |\alpha - \beta|\delta.
\end{aligned}
$$

Kondisi 3: Ada m sehingga $x_m < 1 < x_{m+1}$ dan $x^*_{m+1} > 1$

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) - (\alpha(b-a) + \beta(c-b))| \\
&= \left| \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+1}^{n} \beta(x_i - x_{i-1}) \right] - (\alpha(b-a) + \beta(c-b)) \right| \\
&= \Bigg| \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha(x_i - x_{i-1}) + \beta(x_{m+1} - x_m) + \sum_{i=m+2}^{n} \beta(x_i - x_{i-1}) \right] \\
&\quad - \left[\alpha(b - x_m) + \beta(x_{m+1} - b) + \sum_{i=1}^{m} \alpha(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+2}^{n} \beta(x_i - x_{i-1}) \right] \Bigg| \\
&= |\beta(x_{m+1} - x_m) - \alpha(1 - x_m) - \beta(x_{m+1} - 1)| \\
&= |(\beta - \alpha)(1 - x_m)| < |\beta - \alpha|\delta.
\end{aligned}
$$

Dengan melihat hasil pada Kondisi 1, Kondisi 2 dan Kondisi 3 di atas diperoleh

$$|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) - (\alpha(b-a) + \beta(c-b))| < |\beta - \alpha|\delta.$$

Sekarang pilih $\delta \leq \varepsilon/(|\beta - \alpha|)$ didapatkan

$$|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}) - (\alpha(b-a) + \beta(c-b))| < \varepsilon.$$

Dengan demikian, ditemukan bahwa $|\mathcal{S}(g; \dot{\mathcal{P}}) - (\alpha(b-a) + \beta(c-b))| < \varepsilon$ ketika $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ dengan $\delta \leq \varepsilon/(|\beta - \alpha|)$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, ini telah membuktikan bahwa $g \in \mathcal{R}[a, c]$, dan bahwa $\displaystyle\int_a^c g = \alpha(b-a) + \beta(c-b)$, sebagaimana yang diinginkan. ■

Lema 1.2

Jika $J = [c, d]$ adalah subinterval dari $[a, b]$, maka $\mathbb{1}_J \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $\displaystyle\int_a^b \mathbb{1}_J = d - c$.

Bukti. Untuk $a = c$ atau $b = d$ telah dibuktikan pada Lemma 1.1. Selain itu diamati untuk kondisi $a < c < d < b$. Perhatikan bahwa $\mathbb{1}_J$ bisa ditulis sebagai

$$\mathbb{1}_J = \mathbb{1}_{[a,d]} - \mathbb{1}_{[a,c)}.$$

Mengikuti Lemma 1.1 dan Teorema 1.2 didapatkan $\mathbb{1}_{[a,d]}, \mathbb{1}_{[a,c)} \in \mathcal{R}[a,b]$. Lebih lanjut, berdasarkan Teorema 1.3 diperoleh $\mathbb{1}_J \in \mathcal{R}[a,b]$ dan dikombinasikan dengan Lemma 1.1 dan Teorema 1.2 didapatkan $\int_a^b \mathbb{1}_J = (d-a) - (c-a) = d - c$. ■

☞ **Catatan 1.2**
Ada tiga subinterval lainnya J dengan titik akhir yang sama c dan d, yaitu, $[c,d)$, $(c,d]$, dan (c,d). Karena, menurut Teorema 1.2, dapat diubah nilai fungsi pada sejumlah titik hingga tanpa mengubah integralnya, maka hasil yang sama berlaku untuk tiga subinterval lainnya ini.

Berikut diberikan lemma mengenai fungsi tangga yang kaitannya dengan integral Riemann.

Teorema 1.7

Jika $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi tangga, maka $\varphi \in \mathcal{R}[a,b]$.

Bukti. Berdasarkan Definisi 1.2, suatu fungsi $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ disebut sebagai fungsi tangga apabila berbentuk

$$\varphi(x) = c_k \quad \text{untuk semua } x \in I_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

dengan $I_1, I_2, \ldots, I_n$ adalah interval yang tidak saling tumpang tindih dengan titik ujungnya adalah $[\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, 2, \cdots, n$ dan $[a,b] = \cup_{k=1}^n I_k$. Lebih lanjut, berdasarkan Catatan 1.1, fungsi tangga φ bisa dituliskan sebagai

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{I_k}(x).$$

Sehingga, berdaarkan Lema 1.2 dan Teorema 1.3 didapatkan bahwa $\varphi \in \mathcal{R}[a,b]$ dan

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k(\beta_k - \alpha_k).$$

■

Kita mengilustrasikan penggunaan fungsi langkah dan Teorema Squeeze dalam dua contoh berikutnya. Yang pertama meninjau kembali sebuah fungsi yang awalnya memerlukan perhitungan yang rumit.

Contoh 1.6

(a) Fungsi g yang didefinisikan oleh $g(x) = 2$ untuk $0 \le x \le 1$ dan $g(x) = 3$ untuk $1 < x \le 3$. Bisa diamati bahwa g adalah fungsi langkah, sehingga integralnya dapat dihitung sebagai

$$\int_0^3 g = 2 \cdot (1-0) + 3 \cdot (3-1) = 2 + 6 = 8.$$

(b) Misalkan $h(x) := x$ pada $[0,1]$ dan $\mathcal{P}_n := \{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, n/n = 1\}$. Didefinisikan fungsi langkah α_n dan ω_n pada subinterval yang tidak saling tumpang tindih $[0,1/n], [1/n, 2/n], \ldots, [(n-1)/n, 1]$ sebagai berikut:

$$\alpha_n(x) := h((k-1)/n) = (k-1)/n \quad \text{untuk } x \in [(k-1)/n, k/n),\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

dan

$$\alpha_n(x) := h((n-1)/n) = (n-1)/n \quad \text{untuk } x \in [(n-1)/n, 1].$$

Artinya, α_n memiliki nilai minimum dari h pada setiap subinterval. Secara serupa, didefinisikan ω_n sebagai nilai maksimum dari h pada setiap subinterval, yaitu:

$$\omega_n(x) := k/n \quad \text{untuk } x \in [(k-1)/n, k/n),\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

dan

$$\omega_n(x) := 1 \quad \text{untuk } x \in [(n-1)/n, 1].$$

Kemudian diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^1 \alpha_n &= \frac{1}{n}(0 + 1/n + 2/n + \cdots + (n-1)/n) \\ &= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}(1 - 1/n).\end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa, juga diperoleh

$$\int_0^1 \omega_n = \frac{1}{2}(1 + 1/n).$$

Dengan demikian, didapatkan

$$\alpha_n(x) \le h(x) \le \omega_n(x) \quad \text{untuk } x \in [0,1]$$

dan

$$\int_0^1 (\omega_n - \alpha_n) = \frac{1}{n}.$$

Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dilih n sehingga $\frac{1}{n} < \varepsilon$, maka dari Teorema Apit didapatkan bahwa h dapat diintegralkan dengan nilai integral dari h berada di antara nilai integral dari α_n dan ω_n untuk semua n dan karenanya memiliki nilai $\frac{1}{2}$.

Teorema 1.8

Jika $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$, maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Bukti. Karena f kontinu pada interval tertutup terbatas $[a, b]$, diperoleh f kontinu seragam pada $[a, b]$. Jadi, untuk $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sehingga jika $u, v \in [a, b]$ dan $|u - v| < \delta$, maka $|f(u) - f(v)| < \varepsilon/(b - a)$.

Misalkan $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi sehingga $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Berdasarkan Teorema mengenai eksistensi nilai maksimum dan minimum dari fungsi kontinu pada interval tertutup terbatas, pilih $u_i \in I_i := [x_{i-1}, x_i]$ sebagai titik dengan f mencapai nilai minimum pada I_i, dan $v_i \in I_i$ sebagai titik di mana f mencapai nilai maksimum pada I_i.

Selanjutnya, didefinisikan fungsi tangga $\alpha(x)$ dengan $\alpha(x) := f(u_i)$ untuk $x \in [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n - 1$, dan $\alpha(x) := f(u_n)$ untuk $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Fungsi $\omega(x)$ didefinisikan serupa menggunakan v_i sebagai pengganti u_i. Diperoleh,

$$\alpha(x) \leq f(x) \leq \omega(x), \quad \text{untuk semua } x \in [a, b].$$

Juga, jelas bahwa

$$0 \leq \int_a^b (\omega - \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (f(v_i) - f(u_i))(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b - a}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Oleh karena itu, dari Teorema Apit, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

■

Fungsi monotone tidak harus kontinu pada setiap titik, ternyata juga dapat diintegralkan secara Riemann. Hasil ini diberikan pada teorema di bawah ini.

Teorema 1.9

Jika $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton pada $[a, b]$, maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Bukti. Misalkan f fungsi naik pada $I = [a, b]$. Bagi interval menjadi n subinterval sama panjang $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, diperoleh $x_k - x_{k-1} = (b - a)/n$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Karena f naik pada I_k, nilai minimum dicapai di ujung kiri x_{k-1} dan nilai maksimum di ujung kanan x_k.

Dengan demikian, fungsi tangga $\alpha(x) := f(x_{k-1})$ dan $\omega(x) := f(x_k)$ untuk $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, memenuhi $\alpha(x) \leq f(x) \leq \omega(x)$ untuk semua $x \in I$ dan didapatkan

$$\int_a^b \alpha = \frac{b - a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})),$$

$$\int_a^b \omega = \frac{b - a}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

Mengurangkan bagian yang relevan, diperoleh

$$\int_a^b \omega - \int_a^b \alpha = \frac{b - a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Jadi, untuk $\varepsilon > 0$, pilih n sehingga $(b-a)(f(b)-f(a))/n < \varepsilon$. Dengan Teorema Apit, f dapat diintegralkan pada I.

■

1.2.3 Teorema Penjumlahan

Teorema 1.10 Teorema Penjumlahan

Misalkan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dan $c \in (a,b)$. Fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika pembatasan f pada $[a,c]$ dan $[c,b]$ keduanya dapat diintegralkan secara Riemann. Dalam hal ini:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bukti. ($\Leftarrow$) Misalkan pembatasan f_1 dari f pada $[a,c]$, dan pembatasan f_2 dari f pada $[c,b]$, dapat diintegralkan secara Riemann menjadi L_1 dan L_2 masing-masing. Maka, untuk $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta' > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}_1$ adalah partisi bertanda dari $[a,c]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta'$, maka $|\mathcal{S}(f_1;\dot{\mathcal{P}}_1)-L_1| < \varepsilon/3$. Demikian pula, terdapat $\delta'' > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}_2$ adalah partisi bertanda dari $[c,b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta''$, maka $|\mathcal{S}(f_2;\dot{\mathcal{P}}_1) - L_2| < \varepsilon/3$.

Jika M adalah batas dari $|f|$, maka definisikan $\delta = \min(\delta', \delta'', \varepsilon/6M)$ dan pilih $\dot{\mathcal{P}}$ sebagai partisi bertanda dari $[a,b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$. Akan dibuktikan bahwa:

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

(i) Jika c adalah titik partisi dari $\dot{\mathcal{P}}$, oleh karena itu partisi $\dot{\mathcal{P}}$ terbagi menjadi dua partisi $\dot{\mathcal{P}}_1$ dari $[a,c]$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2$ dari $[c,b]$. Karena $\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) = \mathcal{S}(f_1;\dot{\mathcal{P}}_1) + \mathcal{S}(f_2;\dot{\mathcal{P}}_1)$, serta $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta'$ dan $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta''$, maka ketidaksamaan (1.4) diperoleh.

(ii) Jika c bukan titik partisi dalam $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^m$ dengan $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, maka ada $k \le m$ sehingga $c \in (x_{k-1}, x_k)$. Didefinisikan $\dot{\mathcal{P}}_1$ sebagai partisi bertanda dari $[a,c]$ dengan:

$$\dot{\mathcal{P}}_1 := \{(I_1,t_1),\dots,(I_{k-1},t_{k-1}),([x_{k-1},c],c)\},$$

dan $\dot{\mathcal{P}}_2$ sebagai partisi bertanda dari $[c,b]$ dengan:

$$\dot{\mathcal{P}}_2 := \{([c,x_k],c),(I_{k+1},t_{k+1}),\dots,(I_m,t_m)\}.$$

Perhitungan secara langsung menunjukkan bahwa:

$$\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}})-\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_1)-\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_2) = f(t_k)(x_k-x_{k-1})-f(c)(x_k-x_{k-1}) = (f(t_k)-f(c))(x_k-x_{k-1}),$$

diperoleh:

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_1) - \mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_2)| \le 2M(x_k - x_{k-1}) < 2M\delta < \varepsilon/3.$$

Karena $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta'$ dan $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta''$, maka:

$$|\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_1) - L_1| < \varepsilon/3 \quad \text{dan} \quad |\mathcal{S}(f;\dot{\mathcal{P}}_2) - L_2| < \varepsilon/3,$$

sehingga diperoleh (1.4).

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

terbukti.

($\Rightarrow$) Misalkan $f \in \mathcal{R}[a,b]$, dan untuk $\varepsilon > 0$, ambil $\eta_\varepsilon > 0$ pada Teorema Kriteria Cauchy 1.5. Misalkan f_1 adalah pembatasan f pada $[a,c]$ dan $\dot{\mathcal{P}}_1, \dot{\mathcal{Q}}_1$ adalah partisi bertanda dari $[a,c]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \eta_\varepsilon$ dan $\|\dot{\mathcal{Q}}_1\| < \eta_\varepsilon$. Dengan menambahkan titik partisi dan tanda dari $[c,b]$, partisi $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{Q}_1$ dapat diperluas menjadi partisi bertanda $\mathcal{P}$ dan $\mathcal{Q}$ pada $[a,b]$ yang memenuhi $\|\mathcal{P}\| < \eta_\varepsilon$ dan $\|\mathcal{Q}\| < \eta_\varepsilon$. Jika digunakan titik tambahan dan tanda yang sama di $[c,b]$ untuk $\mathcal{P}$ dan $\mathcal{Q}$, maka:

$$\mathcal{S}(f;\mathcal{P}) - \mathcal{S}(f;\mathcal{Q}) = \mathcal{S}(f_1;\mathcal{P}_1) - \mathcal{S}(f_1;\mathcal{Q}_1).$$

Karena $\mathcal{P}$ dan $\mathcal{Q}$ memiliki norm η_ε, maka $|\mathcal{S}(f;\mathcal{P}) - \mathcal{S}(f;\mathcal{Q})| < \varepsilon$. Oleh karena itu, Kondisi Cauchy menunjukkan bahwa pembatasan f_1 dari f pada $[a,c]$ adalah di $\mathcal{R}[a,c]$. Dengan cara yang sama, dapat dilihat bahwa pembatasan f_2 dari f pada $[c,b]$ adalah di $\mathcal{R}[c,b]$. Persamaan

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

mengikuti dari bagian pertama pada pembuktian.

■

Akibat 1.1

Jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$, dan jika $[c,d] \subseteq [a,b]$, maka pembatasan f pada $[c,d]$ adalah di $\mathcal{R}[c,d]$.

Bukti. Karena $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $c \in [a,b]$ dan dari Teorema Penjumlahan 1.10, diperoleh bahwa pembatasan f pada $[c,b]$ adalah di $\mathcal{R}[c,b]$. Tetapi jika $d \in (c,b)$, maka dengan menggunakan Teorema Penjumlahan 1.10 menunjukkan bahwa pembatasan f pada $[c,d]$ adalah di $\mathcal{R}[c,d]$.

■

Akibat 1.2

Jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan jika $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$, maka pembatasan f pada setiap subinterval $[c_{i-1}, c_i]$ adalah terintegral Riemann dan

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

Sampai saat ini, telah dipertimbangkan integral Riemann pada interval $[a, b]$ dengan $a < b$. Sangat berguna untuk mendefinisikan integral secara lebih umum yang sifat tambahannya didefinisikan di bawah ini.

Definisi 1.4

Jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan jika $\alpha, \beta \in [a, b]$ dengan $\alpha < \beta$, maka didefinisikan:

$$\int_\beta^\alpha f := -\int_\alpha^\beta f \quad \text{dan} \quad \int_\alpha^\alpha f := 0.$$

Teorema 1.11

Jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan jika α, β, γ adalah sebarang bilangan dalam $[a, b]$, maka:

$$\int_\gamma^\alpha f = \int_\gamma^\beta f + \int_\beta^\alpha f, \tag{1.5}$$

keberadaan dua integral dari tiga integral ini menjamin keberadaan integral ketiga dan kebenaran Persamaan (1.5).

Bukti. Jika dua dari bilangan α, β, γ sama, maka (1.5) berlaku. Dengan demikian, dapat diasumsikan bahwa ketiga bilangan ini berbeda.

Demi simetri, kita memperkenalkan ekspresi:

$$L(\alpha, \beta, \gamma) := \int_\beta^\alpha f + \int_\gamma^\beta f + \int_\alpha^\gamma f.$$

Jelas bahwa (1.5) berlaku jika dan hanya jika $L(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Oleh karena itu, untuk membuktikan pernyataan tersebut, perlu ditunjukkan bahwa $L = 0$ untuk semua enam permutasi dari argumen α, β, γ.

Perhatikan bahwa Teorema Penjumlahan 1.10 menyatakan bahwa $L(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ jika $\alpha < \gamma < \beta$. Namun mudah untuk melihat bahwa $L(\beta, \gamma, \alpha)$ dan $L(\gamma, \alpha, \beta)$ sama dengan $L(\alpha, \beta, \gamma)$.

Selain itu, bilangan:

$$L(\beta, \alpha, \gamma), \quad L(\alpha, \gamma, \beta), \quad \text{dan} \quad L(\gamma, \beta, \alpha)$$

semuanya sama dengan $-L(\alpha, \beta, \gamma)$. Oleh karena itu, L bernilai nol untuk semua konfigurasi yang mungkin dari ketiga titik tersebut.

■

1.2.4 Latihan

1. Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $f \notin \mathcal{R}[a, b]$ jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, terdapat partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}}_n$ dan $\dot{\mathcal{Q}}_n$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| < 1/n$ dan $\|\dot{\mathcal{Q}}_n\| < 1/n$ sehingga $|\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}}_n) - \mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{Q}}_n)| \geq \varepsilon_0$.

2. Diberikan fungsi h yang didefinisikan sebagai $h(x) := x + 1$ untuk $x \in [0, 1]$, bilangan rasional, dan $h(x) := 0$ untuk $x \in [0, 1]$, bilangan irasional. Tunjukkan bahwa h tidak dapat diintegralkan secara Riemann.
3. Misalkan $H(x) := k$ untuk $x = 1/k(k \in \mathbb{N})$ dan $H(x) := 0$ untuk lainnya pada $[0, 1]$. Tunjukkan bahwa H tidak dapat diintegralkan secara Riemann.
4. Jika $\alpha(x) := -x$ dan $\omega(x) := x$ serta jika $\alpha(x) \leq f(x) \leq \omega(x)$ untuk semua $x \in [0, 1]$, apakah itu mengikuti Teorema Apit 1.6 bahwa $f \in \mathcal{R}[0, 1]$?
5. Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hanya memiliki sejumlah berhingga nilai berbeda. Apakah f merupakan fungsi langkah?
6. Jika $\mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}})$ adalah sembarang jumlah Riemann dari $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa terdapat fungsi tangga $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ sehingga $\int_a^b \psi = \mathcal{S}(f; \dot{\mathcal{P}})$.
7. Jika f dan g kontinu pada $[a, b]$ dan jika $\int_a^b f = \int_a^b g$, buktikan bahwa terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = g(c)$.
8. Jika f didefinisikan sebagai pembatasan $\omega(x)$ di mana $c \in (a, b)$ bersifat sebarang, tunjukkan bahwa:
$$\int_a^c f = \int_a^b f - \int_c^b f \quad \text{dan} \quad \int_c^b f = \int_a^b f - \int_a^c f.$$
Petunjuk: Misalkan $\alpha(x) := x - x$; $\omega(x) := x$; $c \in (a, b)$; terapkan Teorema Penjepit.
9. Tunjukkan bahwa $g(x) := \sin(1/x)$ untuk $x \in (0, 1]$ dan $g(0) = 0$ termasuk ke dalam $\mathcal{R}[0, 1]$.
10. Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$, dan pembatasan f pada $[c_{i-1}, c_i]$ termasuk ke dalam $\mathcal{R}[c_{i-1}, c_i]$ untuk $i = 1, \ldots, m$. Buktikan bahwa $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan bahwa formula dalam Akibat 1.2 berlaku.
11. Jika f terbatas dan terdapat himpunan berhingga E sehingga f kontinu di setiap titik $[a, b] \backslash E$, maka tunjukkan bahwa $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
12. Jika f kontinu pada $[a, b]$, $a < b$, tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a, b]$ sehingga didapat $\int_a^b f = f(c)(b - a)$. Hasil ini kadang disebut Teorema Nilai Tengah untuk Integral.
13. Jika f dan g kontinu pada $[a, b]$ dan $g(x) > 0$ untuk semua $x \in [a, b]$, tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$. Tunjukkan bahwa kesimpulan ini gagal jika $g(x) > 0$ tidak berlaku. (Perhatikan bahwa hasil ini adalah perpanjangan dari latihan sebelumnya.)
14. Misalkan f kontinu pada $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ untuk $x \in [a, b]$, dan $M_n := \left(\int_a^b f^n \right)^{1/n}$. Tunjukkan bahwa $\lim_{n \to \infty} M_n = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.
15. Misalkan $a > 0$ dan $f \in \mathcal{R}[-a, a]$.
    a. Jika f genap (artinya, jika $f(-x) = f(x)$ untuk semua $x \in [0, a]$), tunjukkan bahwa

$\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$.

b. Jika f ganjil (artinya, jika $f(-x) = -f(x)$ untuk semua $x \in [0, a]$), tunjukkan bahwa $\int_{-a}^{a} f = 0$.

16. Jika f kontinu pada $[-a, a]$, tunjukkan bahwa $\int_{-a}^{a} f(x)^2 dx = 2\int_{0}^{a} f(x)^2 dx$.

1.3 Integral Darboux

Pendekatan alternatif untuk integral dikembangkan oleh matematikawan Prancis Gaston Darboux (1842–1917). Darboux telah menerjemahkan karya Riemann tentang integrasi ke dalam bahasa Prancis untuk diterbitkan di jurnal Prancis, dan terinspirasi oleh komentar Riemann, ia mengembangkan metode integral dalam bentuk integral atas dan bawah yang diterbitkan pada tahun 1875. Penjumlahan pendekatan ini diperoleh dari partisi dengan menggunakan infimum dan supremum dari nilai fungsi pada subinterval, yang tidak harus dicapai sebagai nilai fungsi dan karenanya jumlah tersebut tidak harus berupa jumlah Riemann.

Pendekatan ini secara teknis lebih sederhana karena menghindari kerumitan bekerja dengan pilihan tanda yang tak terhingga banyaknya. Namun, bekerja dengan infimum dan supremum juga memiliki kerumitan, seperti tidak adanya sifat penjumlahan pada kuantitas tersebut. Selain itu, ketergantungan pada sifat urutan bilangan real menyebabkan kesulitan dalam memperluas integral Darboux ke dimensi yang lebih tinggi, dan lebih penting lagi, menghambat generalisasi ke permukaan yang lebih abstrak seperti manifold.

Pada bagian ini, kita memperkenalkan integral atas dan bawah dari fungsi terbatas pada interval, dan mendefinisikan fungsi terintegral menurut Darboux jika kedua kuantitas ini sama. Selanjutnya, dengan melihat contoh dan menetapkan kriteria keterintegralan seperti Cauchy untuk integral Darboux. Bagian ini diakhiri dengan membuktikan bahwa pendekatan Riemann dan Darboux terhadap integral sebenarnya sama, yaitu, suatu fungsi pada interval tertutup dan terbatas dapat diintegralkan menurut Riemann jika dan hanya jika dapat diintegralkan menurut Darboux.

1.3.1 Jumlah Atas dan Bawah

Misalkan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas pada $I = [a, b]$ dan $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n)$ adalah partisi dari I. Untuk $k = 1, 2, \ldots, n$, didefinisikan

$$m_k := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Jumlah bawah f sesuai partisi $\mathcal{P}$ didefinisikan sebagai

$$L(f; \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}),$$

dan jumlah atas f sesuai partisi $\mathcal{P}$ didefinisikan sebagai

$$U(f;\mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Jika f adalah fungsi positif, maka jumlah bawah $L(f;\mathcal{P})$ dapat ditafsirkan sebagai luas dari gabungan persegi panjang dengan alas $[x_{k-1}, x_k]$ dan tinggi m_k. Demikian pula, jumlah atas $U(f;\mathcal{P})$ dapat ditafsirkan sebagai luas dari gabungan persegi panjang dengan alas $[x_{k-1}, x_k]$ dan tinggi M_k. Interpretasi geometris ini menyarankan bahwa, untuk partisi tertentu, jumlah bawah kurang dari atau sama dengan jumlah atas. Kita sekarang akan membuktikan hal ini.

Lema 1.3

Jika $f : I \to \mathbb{R}$ terbatas dan $\mathcal{P}$ adalah partisi sebarang dari I, maka

$$L(f;\mathcal{P}) \leq U(f;\mathcal{P}).$$

Bukti. Misalkan $\mathcal{P} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Karena $m_k \leq M_k$ untuk $k = 1, 2, \ldots, n$ dan $x_k - x_{k-1} > 0$ untuk $k = 1, 2, \ldots, n$, maka diperoleh

$$L(f;\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = U(f;\mathcal{P}).$$

■

Jika $\mathcal{P} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ dan $\mathcal{Q} := (y_0, y_1, \ldots, y_m)$ adalah partisi-partisi dari I, dikatakan bahwa $\mathcal{Q}$ adalah perbaikan dari $\mathcal{P}$ jika setiap titik partisi $x_k \in \mathcal{P}$ juga termasuk dalam $\mathcal{Q}$ (yaitu, jika $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$). Partisi perbaikan $\mathcal{Q}$ dari partisi $\mathcal{P}$ dapat diperoleh dengan menambahkan sejumlah titik hingga ke $\mathcal{P}$. Dalam hal ini, setiap subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ di $\mathcal{P}$ dapat ditulis sebagai gabungan interval-interval di $\mathcal{Q}$, yaitu

$$[x_{k-1}, x_k] = [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}] \cup \cdots \cup [y_{h-1}, y_h].$$

Berikut diberikan lema yang membahas pengaruh partisi perbaikan terhadap jumlah atas dan jumlah bawah.

Lema 1.4

Jika $f : I \to \mathbb{R}$ terbatas, $\mathcal{P}$ adalah partisi dari I dan $\mathcal{Q}$ adalah partisi perbaikan dari $\mathcal{P}$, maka

$$L(f;\mathcal{P}) \leq L(f;\mathcal{Q}) \quad \text{dan} \quad U(f;\mathcal{Q}) \leq U(f;\mathcal{P}).$$

Bukti. Misalkan $\mathcal{P} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Pertama diperiksa efek dari menambahkan satu titik ke $\mathcal{P}$. Misalkan $z \in I$ sedemikian sehingga $x_{k-1} < z < x_k$ dan misalkan $\mathcal{P}'$ adalah partisi

$$\mathcal{P}' := (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, z, x_k, \ldots, x_n),$$

yang diperoleh dari $\mathcal{P}$ dengan menambahkan z ke $\mathcal{P}$. Misalkan m_k' dan M_k' adalah bilangan-bilangan

$$m_k' := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, z]\}, \quad M_k' := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, z]\},$$

$$m_k'' := \inf\{f(x) : x \in [z, x_k]\}, \quad M_k'' := \sup\{f(x) : x \in [z, x_k]\},$$

dan berlaku

$$m_k \leq m_k', \quad m_k \leq m_k'', \quad M_k' \leq M_k, \quad M_k'' \leq M_k.$$

Oleh karena itu,

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(z - x_{k-1}) + m_k(x_k - z) \leq m_k'(z - x_{k-1}) + m_k''(x_k - z),$$

yang berarti

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq m_k'(z - x_{k-1}) + m_k''(x_k - z).$$

Dengan argumen serupa untuk M_k, diperoleh

$$M_k'(z - x_{k-1}) + M_k''(x_k - z) \leq M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Dengan ini, dapat disimpulkan bahwa $L(f;\mathcal{P}) \leq L(f;\mathcal{Q})$ dan $U(f;\mathcal{Q}) \leq U(f;\mathcal{P})$. Argumen ini dapat diperluas ke semua interval yang terbagi dengan menambahkan titik, sehingga partisi perbaikan selalu meningkatkan jumlah bawah dan menurunkan jumlah atas.

■

Lema 1.5

Misalkan $f : I \to \mathbb{R}$ dibatasi. Jika $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ adalah dua partisi dari I, maka

$$L(f;\mathcal{P}_1) \leq U(f;\mathcal{P}_2).$$

Bukti. Misalkan $\mathcal{Q} := \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ menjadi partisi yang diperoleh dengan menggabungkan titik-titik dari $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{P}_2$. Maka $\mathcal{Q}$ adalah penyempurnaan dari $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{P}_2$. Oleh karena itu, berdasarkan Lema 1.3 dan 1.4, kita simpulkan bahwa

$$L(f;\mathcal{P}_1) \leq L(f;Q) \leq U(f;Q) \leq U(f;\mathcal{P}_2).$$

■

1.3.2 Integral Bawah dan Atas

Dalam subbab ini himpunan semua partisi dari interval I dinyatakan oleh $\mathscr{P}(I)$. Jika $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas, maka setiap $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)$ dapat ditentukan dua bilangan: $L(f;\mathcal{P})$ dan $U(f;\mathcal{P})$. Oleh karena itu, koleksi $\mathscr{P}(I)$ menentukan dua himpunan bilangan: 1) himpunan jumlah bawah $L(f;\mathcal{P})$ dan himpunan jumlah atas $U(f;\mathcal{P})$ untuk $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)$.

Definisi 1.5

Misalkan $I = [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas. Integral bawah dari f pada I adalah bilangan

$$L(f) := \sup\{L(f; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\},$$

dan integral atas dari f pada I adalah bilangan

$$U(f) := \inf\{U(f; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\}.$$

Karena f adalah fungsi terbatas, nilai-nilai di bawah ini eksis:

$$m_I := \inf\{f(x) : x \in I\} \quad \text{dan} \quad M_I := \sup\{f(x) : x \in I\}.$$

Dapat segera terlihat bahwa untuk setiap $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)$, berlaku

$$m_I(b - a) \le L(f; \mathcal{P}) \le U(f; \mathcal{P}) \le M_I(b - a).$$

Dapat disimpulkan bahwa

$$m_I(b - a) \le L(f) \quad \text{dan} \quad U(f) \le M_I(b - a).$$

Teorema 1.12

Misalkan $I = [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas. Maka integral bawah $L(f)$ dan integral atas $U(f)$ dari f pada I ada. Lebih lanjut,

$$L(f) \le U(f).$$

Bukti. Jika $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{P}_2$ adalah partisi-partisi dari I, maka dari Lemma 1.3 diperoleh $L(f; \mathcal{P}_1) \le U(f; \mathcal{P}_2)$. Oleh karena itu bilangan $U(f; \mathcal{P}_2)$ adalah batas atas untuk himpunan $\{L(f; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\}$. Akibatnya, $L(f)$, sebagai supremum dari himpunan ini, memenuhi

$$L(f) \le U(f; \mathcal{P}_2).$$

Karena $\mathcal{P}_2$ adalah partisi sembarang dari I, maka $L(f)$ adalah batas bawah untuk himpunan $\{U(f; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\}$. Akibatnya, didapatkan

$$L(f) \le U(f).$$

■

1.3.3 Integral Darboux

Jika I adalah interval tertutup terbatas dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas, telah dibuktikan pada Teorema 1.12 bahwa integral bawah $L(f)$ dan integral atas $U(f)$ selalu ada. Selain itu, selalu berlaku $L(f) \le U(f)$. Namun, mungkin saja terjadi $L(f) < U(f)$, seperti yang akan dilihat kemudian. Di sisi lain, terdapat banyak fungsi dengan $L(f) = U(f)$.

Definisi 1.6

Misalkan $I = [a,b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas. Fungsi f disebut terintegral Darboux pada I jika $L(f) = U(f)$. Dalam kasus ini, integral Darboux dari f pada I didefinisikan sebagai nilai $L(f) = U(f)$.

Dengan demikian, kita melihat bahwa jika integral Darboux dari suatu fungsi pada interval ada, maka integral tersebut adalah bilangan riil **unik** yang berada di antara jumlah bawah dan jumlah atas.

Karena akan segera dibuktikan kesetaraan antara integral Darboux dan Riemann, akan digunakan notasi standar $\int_a^b f$ atau $\int_a^b f(x)\,dx$ untuk integral Darboux dari fungsi f pada $[a,b]$. Konteksnya seharusnya mencegah kebingungan.

Contoh 1.7

(a) Fungsi konstan adalah fungsi yang terintegralkan Darboux. Misalkan $f(x) := c$ untuk $x \in I := [a,b]$. Jika $\mathcal{P}$ adalah partisi sembarang dari I, maka mudah dilihat bahwa $L(f;\mathcal{P}) = c(b-a) = U(f;\mathcal{P})$ (Lihat Latihan 7.4.2). Oleh karena itu, integral bawah dan integral atas diberikan oleh $L(f) = c(b-a) = U(f)$. Akibatnya, f terintegral Darboux pada I dan $\int_a^b f = c(b-a)$.

(b) Misalkan g didefinisikan pada $[0,3]$ sebagai berikut: $g(x) := 2$ jika $0 \leq x \leq 1$ dan $g(x) := 3$ jika $2 \leq x \leq 3$. Untuk $\varepsilon > 0$, didefinisikan partisi $\mathcal{P}_\varepsilon := \{0, 1, 1+\varepsilon, 3\}$, maka diperoleh jumlah atas

$$U(g;P_\varepsilon) = 2\cdot(1-0) + 3\cdot(1+\varepsilon-1) + 3\cdot(3-1-\varepsilon) = 2 + 3\varepsilon + 6 - 3\varepsilon = 8.$$

Oleh karena itu, integral atas memenuhi $U(g) \leq 8$. Demikian pula, diperoleh jumlah bawah

$$L(g;P_\varepsilon) = 2\cdot(1-0) + 2\cdot(1+\varepsilon-1) + 3\cdot(3-1-\varepsilon) = 2 + 2\varepsilon + 6 - 3\varepsilon = 8 - \varepsilon,$$

sehingga integral bawah memenuhi $L(g) \geq 8$. Sedangkan Teorema 1.12 memberikan $L(g) \leq U(g)$ dan oleh karena itu $L(g) = U(g) = 8$. Jadi integral Darboux dari g adalah 8.

(c) Fungsi $h(x) := x$ dapat diintegralkan pada $[0,1]$. Misalkan $\mathcal{P}_n$ adalah partisi dari $I := [0,1]$ menjadi n subinterval yang diberikan oleh

$$\mathcal{P}_n := \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right).$$

Karena h adalah fungsi yang meningkat, infimum dan supremum pada subinterval $((k-1)/n, k/n)$ dicapai di titik ujung kiri dan kanan, berturut-turut, dan diberikan oleh $m_k = (k-1)/n$ dan $M_k = k/n$. Selain itu, karena $x_k - x_{k-1} = 1/n$ untuk semua $k = 1, 2, \ldots, n$, diperoleh

$$L(h; \mathcal{P}_n) = (0 + 1 + \cdots + (n-1))/n^2, \quad U(h; \mathcal{P}_n) = (1 + 2 + \cdots + n)/n^2.$$

Jika digunakan rumus $1 + 2 + \cdots + m = m(m+1)/2$, untuk $m \in \mathbb{N}$, didapatkan

$$L(h; \mathcal{P}_n) = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad U(h; \mathcal{P}_n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Karena himpunan partisi $\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ adalah bagian dari semua partisi $\mathscr{P}(I)$ dari I, diperoleh

$$\frac{1}{2} = \sup\{L(h; \mathcal{P}_n) : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{L(h; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\} = L(h),$$

dan juga bahwa

$$U(h) = \inf\{U(h; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\} \leq \inf\{U(h; \mathcal{P}_n) : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}.$$

Karena $\frac{1}{2} \leq L(h) \leq U(h) \leq \frac{1}{2}$, bisa disimpulkan bahwa $L(h) = U(h) = \frac{1}{2}$. Oleh karena itu, h terintegral Darboux pada $[0, 1]$ dan

$$\int_0^1 h = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

(d) Fungsi yang tidak dapat diintegralkan. Misalkan $I := [0, 1]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi Dirichlet yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } x \text{ rasional}, \\ 0, & \text{untuk } x \text{ irasional}. \end{cases}$$

Jika $\mathcal{P} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ adalah partisi sembarang dari $[0, 1]$, maka karena setiap interval nontrivial mengandung bilangan rasional dan irasional, sehingga diperoleh $m_k = 0$ dan $M_k = 1$. Oleh karena itu, didapat $L(f; \mathcal{P}) = 0$, $U(f; \mathcal{P}) = 1$, untuk semua $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)$, sehingga $L(f) = 0$ dan $U(f) = 1$. Karena $L(f) \neq U(f)$, fungsi f tidak terintegral Darboux pada $[0, 1]$.

Teorema 1.13

Misalkan $I := [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas pada I. Fungsi f dapat diintegralkan Darboux pada I jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat partisi

$\mathcal{P}_\varepsilon$ *dari* I *sehingga*

$$U(f;\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f;\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Bukti. Jika f terintegral Darboux, maka $L(f) = U(f)$. Jika $\varepsilon > 0$ diberikan, dari definisi integral bawah sebagai supremum, terdapat partisi $\mathcal{P}_1$ dari I sehingga $L(f) - \varepsilon/2 < L(f;P_1)$. Dengan cara serupa, terdapat partisi $\mathcal{P}_2$ dari I sehingga $U(f;\mathcal{P}_2) < U(f) + \varepsilon/2$.

Misalkan $\mathcal{P}_\varepsilon := \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, maka $\mathcal{P}_\varepsilon$ adalah perbaikan dari $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{P}_2$. Akibatnya, menurut Lema 1.3 dan 1.4, didapat

$$L(f) - \varepsilon/2 < L(f;\mathcal{P}_1) \leq L(f;\mathcal{P}_\varepsilon) \leq U(f;\mathcal{P}_\varepsilon) \leq U(f;\mathcal{P}_2) < U(f) + \varepsilon/2,$$

dan oleh karena itu

$$U(f;\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f;\mathcal{P}_\varepsilon) < (U(f) + \varepsilon/2) - (L(f) - \varepsilon/2) = (U(f) - L(f)) + \varepsilon.$$

Karena $L(f) = U(f)$, dapat disimpulkan bahwa persamaan (1.6) terpenuhi.

Untuk membuktikan sebaliknya, misalkan berlaku bahwa untuk sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat partisi $\mathcal{P}_\varepsilon$ dari I sehingga (1.6) terpenuhi. Kemudian berdasarkan definisi integral atas dan bawah diperoleh

$$L(f;\mathcal{P}_\varepsilon) \leq \sup\{L(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\} = L(f)$$

dan

$$U(f) = \inf\{L(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\} \leq U(f;\mathcal{P}_\varepsilon).$$

Bberdasarkan asumsi, (1.6) berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, sehingga

$$U(f) - L(f) \leq U(f;P_\varepsilon) - L(f;P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ bersifat sebarang, bisa disimpulkan $U(f) \leq L(f)$. Karena ketaksamaan $L(f) \leq U(f)$ selalu benar, diperoleh $L(f) = U(f)$ dan oleh karena itu f dapat diintegralkan Darboux. ■

Akibat 1.3

Misalkan $I = [a,b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas. Jika $\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ adalah barisan partisi dari I sehingga

$$\lim_{n\to\infty} (U(f;\mathcal{P}_n) - L(f;\mathcal{P}_n)) = 0, \tag{1.7}$$

maka f terintegral Darboux dan

$$\lim_{n\to\infty} L(f;\mathcal{P}_n) = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f;\mathcal{P}_n). \tag{1.8}$$

Bukti. Misalkan (1.7) terpenuhi. Berdasarkan definisi limit barisan, diperoleh bahwa untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat K sehingga jika $n \geq K$ maka $U(f;\mathcal{P}_n) - L(f;\mathcal{P}_n) < \varepsilon$. Oleh karena itu, f memenuhi kriteria pada Teorema 1.13, sehingga f terintegral Darboux yaitu $U(f) = L(f) = \int_a^b f$. Selain itu, juga bisa diperoleh

$$0 \leq U(f;\mathcal{P}_n) - U(f) = U(f;\mathcal{P}_n) - L(f) \leq U(f;\mathcal{P}_n) - L(f;\mathcal{P}_n) < \varepsilon$$

untuk setiap $n \geq K$. Dengan demikian

$$\lim_{n\to\infty} U(f;\mathcal{P}_n) = U(f) = \int_a^b f.$$

Untuk melengkapi (1.8), gunakan (1.7) dan diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} U(f;\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} (U(f;\mathcal{P}_n) - L(f;\mathcal{P}_n)) + \lim_{n\to\infty} L(f;\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} L(f;\mathcal{P}_n).$$

■

Makna Akibat ini adalah bahwa meskipun definisi integral Darboux melibatkan semua partisi interval yang mungkin, untuk fungsi tertentu, keberadaan integral dan nilainya sering kali dapat ditentukan dengan barisan partisi tertentu.

Sebagai contoh, jika $h(x) := x$ pada $[0,1]$ dan $\mathcal{P}_n$ adalah partisi seperti pada Contoh 1.7-(c), maka

$$\lim_{n\to\infty} (U(h;\mathcal{P}_n) - L(h;\mathcal{P}_n)) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

dan oleh karena itu

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} L(h;P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1+1/n) = \frac{1}{2}.$$

1.3.4 Fungsi Kontinu dan Monoton

Telah ditunjukkan pada subbab 1.2 bahwa fungsi yang kontinu atau monoton pada selang tertutup dan terbatas adalah terintegralkan Riemann. Pembuktian menggunakan pendekatan dengan fungsi tangga dan Teorema Apit 1.6. Kedua pembuktian ini memanfaatkan secara esensial fakta bahwa fungsi kontinu maupun fungsi monoton mencapai nilai maksimum dan minimum pada selang tertutup dan terbatas. Artinya, jika f adalah fungsi kontinu atau monoton pada $[a,b]$, maka untuk partisi $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, nilai

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in I_k\}, \quad m_k = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$$

untuk $k = 1, 2, \ldots, n$ dicapai sebagai nilai fungsi pada titik tertentu. Untuk fungsi kontinu, ini dibahas pada bab fungsi kontinu mengenai nilai maksimum dan minimum, dan untuk fungsi monoton, nilai ini dicapai di titik ujung kanan dan kiri selang.

Jika kita mendefinisikan fungsi tangga ω pada $[a, b]$ dengan

$$\omega(x) := M_k \quad \text{untuk } x \in [x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

dan

$$\omega(x) := M_n \quad \text{untuk } x \in [x_{n-1}, x_n],$$

maka kita perhatikan bahwa integral Riemann dari ω diberikan oleh

$$\int_a^b \omega = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Sekarang pada subbab ini jumlah tersebut dikenal sebagai jumlah atas Darboux $U(f; \mathcal{P})$, sehingga diperoleh

$$\int_a^b \omega = U(f; \mathcal{P}).$$

Demikian pula, jika fungsi langkah α didefinisikan oleh

$$\alpha(x) := m_k \quad \text{untuk } x \in [x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

dan

$$\alpha(x) := m_n \quad \text{untuk } x \in [x_{n-1}, x_n],$$

maka didapat integral Riemann

$$\int_a^b \alpha = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = L(f; \mathcal{P}).$$

Kurangkan kedua integral di atas, sehingga didapat

$$\int_a^b (\omega - \alpha) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = U(f; \mathcal{P}) - L(f; \mathcal{P}).$$

Bisa dilihat bahwa Kriteria Keterintegralan Darboux 1.13 adalah padanan dari Teorema Apit 1.6 untuk integral Riemann.

Oleh karena itu, jika pada pembuktian dari Teorema 1.8 dan 1.9 dilakukan penggantian integral fungsi tangga dengan jumlah bawah dan atas yang sesuai, maka diperoleh pembuktian dari fungsi kontinu dan fungsi monoton yang terintegral Darboux. Sebagai contoh, pada Teorema 1.8 untuk fungsi kontinu, didapat

$$\alpha_*(x) = f(u_i) = m_i, \quad \omega_*(x) = f(v_i) = M_i,$$

dan dengan mengganti integral dari $\omega_* - \alpha_*$ dengan $U(f; \mathcal{P}) - L(f; \mathcal{P})$.)

Dengan demikian, diperoleh teorema berikut.

Teorema 1.14

Jika fungsi f pada selang $I = [a, b]$ adalah kontinu atau monoton pada I, maka f terintegral Darboux pada I.

Pengamatan sebelumnya yang menghubungkan integral Riemann dan Darboux memainkan peran dalam pembuktian bahwa integral Riemann dan Darboux ekuivalen, yang mana akan dibahas pada bagian selanjutnya. Tentu saja, setelah hal tersebut dibuktikan, maka teorema sebelumnya akan menjadi konsekuensi langsung.

1.3.5 Hubungan antara Integral Riemann dan Integral Darboux

Subbab ini diakhiri dengan sebuah pembuktian bahwa definisi integral menurut Riemann dan Darboux adalah ekuivalen dalam arti bahwa suatu fungsi pada interval tertutup dan terbatas adalah terintegralk Riemann jika dan hanya jika fungsi tersebut terintegral Darboux, serta nilai integralnya sama. Hal ini tidak langsung terlihat jelas. Integral Riemann didefinisikan dalam bentuk jumlah nilai fungsi (dengan titik sampel) bersama dengan suatu proses limit berdasarkan panjang subinterval dalam suatu partisi. Di sisi lain, integral Darboux didefinisikan dalam bentuk jumlah yang menggunakan infimum dan supremum dari nilai fungsi, yang tidak harus berupa nilai fungsi itu sendiri, serta suatu proses limit berdasarkan partisi perbaikan, bukan berdasarkan ukuran subinterval dalam suatu partisi. Namun, keduanya ternyata ekuivalen.

Latar belakang yang diperlukan untuk membuktikan kesetaraan ini sudah tersedia. Sebagai contoh, suatu fungsi terintegral Darboux, selain dapat dikenali dengan jumlah Darboux atas dan bawah juga bisa dikenali dengan integral Riemann dari fungsi tangga. Dengan demikian, Kriteria Keterintegralan 1.13 untuk integral Darboux berkorespondensi dengan Teorema Apit 1.6 pada integral Riemann. Sebaliknya, jika suatu fungsi terintegral Riemann, definisi supremum dan infimum memungkinkan dipilih titik sampel sehingga jumlah Riemann dapat dibuat sedekat mungkin dengan jumlah Darboux atas dan bawah sesuai yang diinginkan. Dengan cara ini, bisa dihubungkan integral Riemann dengan integral Darboux atas dan bawah. Rincian lebih lanjut diberikan dalam pembuktian.

Teorema 1.15

Sebuah fungsi f pada $I = [a, b]$ adalah terintegral Darboux jika dan hanya jika fungsi tersebut terintegral Riemann.

Bukti. Misalkan f terintegral Darboux. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, ambil partisi $\mathcal{P}_\varepsilon = \{I_{k,\varepsilon}\}_{k=1}^n$ dari $[a, b]$ sehingga

$$U(f; \mathcal{P}_\varepsilon) - L(f; \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Untuk partisi ini, didefinisikan fungsi tangga α_ε dan ω_ε dengan

$$\omega_\varepsilon(x) = M_{k,\varepsilon}, \quad \alpha_\varepsilon(x) = m_{k,\varepsilon}, \quad \text{untuk } x \in I_{k,\varepsilon}.$$

dengan M_k adalah supremum dan m_k adalah infimum dari f pada $I_{k,\varepsilon}$. Jelas bahwa

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x), \quad \forall x \in [a,b]. \tag{1.9}$$

Dari Teorema 1.7, didapatkan bahwa ω dan α terintegral Riemann dan nilai integralnya diberikan oleh

$$\int_a^b \omega_\varepsilon = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = U(f;\mathcal{P}_\varepsilon) \text{ dan } \int_a^b \alpha_\varepsilon = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = L(f;\mathcal{P}_\varepsilon).$$

Oleh karena itu, didapat

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) = U(f;\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f;\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Dengan menggunakan Teorema Apit 1.6, maka f adalah fungsi Riemann terintegrasi. Selain itu, amati bahwa (1.9) dan (1.3.5) berlaku untuk setiap partisi $\mathcal{P}$ dan oleh karena itu integral Riemann dari f terletak di antara $L(f;\mathcal{P})$ dan $U(f;\mathcal{P})$ untuk setiap partisi $\mathcal{P}$. Oleh karena itu, integral Riemann dari f sama dengan integral Darboux dari f.

Sekarang, anggap bahwa f adalah fungsi terintegral Riemann dan misalkan $A = \int_a^b f$ menyatakan nilai dari integralnya. Sehingga, berdasarkan Teorema 1.4, f terbatas dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}}$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, didapat $|S(f;\dot{\mathcal{P}} - A| < \varepsilon$, yang dapat ditulis sebagai

$$A - \varepsilon < S(f;\dot{\mathcal{P}}) < A + \varepsilon. \tag{1.10}$$

Karena $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ adalah nilai supremum pada $[x_{k-1}, x_k]$, dapat dipilih partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{k-1}, x_k], t_k)\}$ dengan tanda t_k dalam $[x_{k-1}, x_k]$ sehingga $f(t_k) > M_k - \varepsilon/(b-a)$. Akibatnya diperoleh

$$S(f;\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) - \varepsilon = U(f;\mathcal{P}) - \varepsilon \geq U(f) - \varepsilon. \tag{1.11}$$

Menggabungkan pertidaksamaan (1.10) dan (1.11), didapatkan

$$A + \varepsilon > S(f;\dot{\mathcal{P}}) \geq U(f) - \varepsilon.$$

Oleh karena itu diperoleh $U(f) < A + 2\varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, ini menyiratkan bahwa $U(f) \leq A$.

Dengan cara yang sama, jumlah bawah juga dapat didekati dengan jumlah Riemann dan menunjukkan bahwa $L(f) \geq A - 2\varepsilon$ untuk sebarang $\varepsilon > 0$, yang menyiratkan $L(f) \geq A$. Dengan demikian, didapatkan pertidaksamaan $A \leq L(f) \leq U(f) \leq A$, yang artinya $L(f) = U(f) = A = \int_a^b f$. Oleh karena itu, fungsi f adalah terintegral Darboux dengan nilai integralnya sama dengan integral Riemann.

■

1.3.6 Latihan

1. Misalkan $f(x) := |x|$ untuk $-1 \le x \le 2$. Hitung $L(f;\mathcal{P})$ dan $U(f;\mathcal{P})$ untuk partisi berikut:
   a. $\mathcal{P}_1 := (-1, 0, 1, 2)$,
   b. $\mathcal{P}_2 := (-1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2)$.
2. Buktikan bahwa jika $f(x) := c$ untuk $x \in [a,b]$, maka integral Darboux-nya sama dengan $c(b-a)$.
3. Misalkan f dan g adalah fungsi terbatas pada $I = [a,b]$. Jika $f(x) \le g(x)$ untuk semua $x \in I$, tunjukkan bahwa $L(f) \le L(g)$ dan $U(f) \le U(g)$.
4. Misalkan f terbatas pada $[a,b]$ dan $k > 0$. Tunjukkan bahwa $L(kf) = kL(f)$ dan $U(kf) = kU(f)$.
5. Misalkan f, g, h adalah fungsi terbatas pada $I = [a,b]$ sehingga $f(x) \le g(x) \le h(x)$ untuk semua $x \in I$. Tunjukkan bahwa jika f dan h terintegral Darboux serta $\int_a^b f = \int_a^b h$, maka g juga terintegral Darboux dengan $\int_a^b g = \int_a^b f$.
6. Misalkan f didefinisikan pada $[0,2]$ dengan $f(x) := 1$ jika $x \neq 1$ dan $f(1) := 0$. Tunjukkan bahwa integral Darboux dari f ada dan tentukan nilainya.
7. a. Buktikan bahwa jika $g(x) := 0$ untuk $0 \le x \le \frac{1}{2}$ dan $g(x) := 1$ untuk $\frac{1}{2} < x \le 1$, maka integral Darboux dari g pada $[0,1]$ adalah $\frac{1}{2}$.
   b. Apakah kesimpulan tetap berlaku jika nilai g di titik $\frac{1}{2}$ diubah menjadi 13?
8. Misalkan f kontinu pada $I = [a,b]$ dan $f(x) \ge 0$ untuk semua $x \in I$. Buktikan bahwa jika $L(f) = 0$, maka $f(x) = 0$ untuk semua $x \in I$.
9. Misalkan f_1 dan f_2 adalah fungsi terbatas pada $[a,b]$. Tunjukkan bahwa $L(f_1) + L(f_2) \le L(f_1 + f_2)$.
10. Jika f adalah fungsi terbatas pada $[a,b]$ sehingga $f(x) = 0$ kecuali untuk x di $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ dalam $[a,b]$, tunjukkan bahwa $L(f) = U(f) = 0$.
11. Misalkan $f(x) = x^2$ untuk $0 \le x \le 1$. Untuk partisi $\mathcal{P}_n := (0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1)$, hitung $L(f,\mathcal{P}_n)$ dan $U(f,\mathcal{P}_n)$, serta tunjukkan bahwa $L(f) = U(f) = \frac{1}{3}$. (Gunakan rumus $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)
12. Misalkan $\mathcal{P}$ adalah partisi yang keberadaannya dijamin oleh Teorema Kriteria Keterintegralan Darboux 1.13. Tunjukkan bahwa jika $\mathcal{P}$ adalah partisi sembarang, maka $U(f;\mathcal{P}) - L(f;\mathcal{P}) < \varepsilon$.
13. Tuliskan pembuktian bahwa suatu fungsi f pada $[a,b]$ terintegral Darboux jika fungsinya:
   a. kontinu, atau

b. monoton.

14. Misalkan f didefinisikan pada $I := [a, b]$ dan anggap bahwa f memenuhi kondisi Lipschitz $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ untuk semua x, y dalam I. Jika $\mathcal{P}_n$ adalah partisi I dengan membagi I menjadi n bagian yang sama, tunjukkan bahwa $U(f; \mathcal{P}_n) - L(f; \mathcal{P}_n) \leq K(b - a)^2/n$.

Bab 2 Barisan Fungsi

Dalam bab-bab sebelumnya, telah banyak digunakan barisan bilangan real. Dalam bab ini, akan dipertimbangkan barisan yang suku-sukunya berupa *fungsi* dari bilangan real. Barisan fungsi ini muncul secara alami dalam analisis real dan sering digunakan untuk mendekati suatu fungsi tertentu serta mendefinisikan fungsi baru berdasarkan fungsi yang telah diketahui.

Pada subbab 2.1, akan diperkenalkan dua jenis kekonvergenan untuk barisan fungsi, yaitu konvergensi titik demi titik (*pointwise convergence*) dan konvergensi seragam (*uniform convergence*). Konvergensi seragam dianggap lebih penting dan akan menjadi fokus utama. Hal ini karena, seperti dijelaskan dalam subbab 2.2, sifat-sifat tertentu tetap dipertahankan dalam konvergensi seragam. Dengan kata lain, jika setiap suku dalam suatu barisan fungsi yang konvergen seragam memiliki sifat-sifat tersebut, maka fungsi limitnya juga memilikinya.

2.1 Konvergensi titik demi titik dan Konvergensi seragam

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$ dan ditentukan bahwa untuk masing-masing $n \in \mathbb{N}$ ada fungsi $f_n : A \to \mathbb{R}$. Di sini (f_n) dikatakan sebagai barisan fungsi dari A ke $\mathbb{R}$. Jelas, masing-masing $x \in A$, barisan tersebut menghasilkan barisan bilangan real, yaitu

$$(f_n(x)). \tag{2.1}$$

Untuk $x \in A$ tertentu, barisan tersebut mungkin konvergen, dan untuk $x \in A$ yang lain barisan tersebut divergen. Pada umumnya, nilai dari limit, jika ada, akan bergantung pada pemilihan titik $x \in A$.

Definisi 2.1

Misal (f_n) barisan fungsi dari $A \subseteq \mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, dan misal f fungsi dari $A_0 \subseteq \mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Dikatakan barisan (f_n) konvergen pada A_0 ke f, jika untuk masing-masing $x \in A_0$ barisan $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x)$ di $\mathbb{R}$. Dalam kasus ini f disebut limit pada A_0 dari barisan (f_n). Saat fungsi f ada, (f_n) dikatakan konvergen pada A_0, atau (f_n) konvergen titik demi titik pada A_0. Ini dinotasikan dengan:

$$f = \lim(f_n) \text{ pada } A_0 \text{ atau } f_n \to f \text{ pada } A_0.$$

Kadang-kadang, jika f_n dan f diberikan dalam bentuk rumus, dituliskan

$$f(x) = \lim f_n(x) \quad \text{untuk} \quad x \in A_0, \quad \text{atau} \quad f_n(x) \to f(x) \quad \text{untuk} \quad x \in A_0.$$

Biasanya, A_0 dipilih sebagai himpunan terbesar yang mungkin sehingga semua $x \in A$

dengan barisan (2.1) konvergen dalam $\mathbb{R}$.

$$f = \lim(f_n) \quad \text{pada} \quad A_0, \quad \text{atau} \quad f_n \to f \quad \text{pada} \quad A_0.$$

Contoh 2.1

(a) $\lim(x/n) = 0$ untuk $x \in \mathbb{R}$.
Untuk $n \in \mathbb{N}$, misalkan $f_n(x) := x/n$ dan misalkan $f(x) := 0$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Bisa diamati bahwa untuk untuk $x \in \mathbb{R}$ barisan $(f_n(x))$ konvergen ke 0 dan oleh karena itu barisan (f_n) konvergen pada $\mathbb{R}$ ke f.

(b) $\lim(x^n)$.
Misalkan $g_n(x) := x^n$ untuk $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Jelas bahwa jika $x = 1$, maka barisan $(g_n(1)) = (1)$ konvergen ke 1. Selanjutnya, $\lim(x^n) = 0$ untuk $0 \leq x < 1$, dan hal ini juga berlaku untuk $-1 < x < 0$. Jika $x = -1$, maka $g_n(-1) = (-1)^n$ dan terlihat bahwa barisan ini divergen. Demikian pula, jika $|x| > 1$, maka barisan (x^n) tidak terbatas, sehingga tidak konvergen dalam $\mathbb{R}$.
Kita menyimpulkan bahwa jika

$$g(x) := \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

maka barisan (g_n) konvergen ke g pada himpunan $(-1, 1]$.

(c) $\lim((x^2 + nx)/n) = x$ untuk $x \in \mathbb{R}$.
Misalkan $h_n(x) := (x^2 + nx)/n$ untuk $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dan misalkan $h(x) := x$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Karena $h_n(x) = (x^2/n) + x$, diperoleh bahwa $h_n(x) \to h(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, segingga barisan (h_n) konvergen ke h pada himpunan $\mathbb{R}$.

(d) $\lim((1/n)\sin(x + n)) = 0$ untuk $x \in \mathbb{R}$.
Misalkan $F_n(x) := (1/n)\sin(x+n)$ untuk $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dan misalkan $F(x) := 0$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Karena $|\sin x| \leq 1$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, didapat

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\frac{\sin(x + n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa $\lim(F_n(x)) = 0 = F(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Sehingga barisan (F_n) konvergen ke F pada himpunan $\mathbb{R}$.

Untuk menekankan kembali Definisi 2.1 dan untuk mempersiapkan metode yang penting dalam konvergensi seragam. Berikut dirumuskan kembali Definisi 2.1 sebagai berikut.

Lema 2.1

Barisan fugsi (f_n) dari $A \subseteq \mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ konvergen ke suatu fungsi $f : A_0 \to \mathbb{R}$ pada A_0 jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x \in A_0$ ada bilangan asli $K(\varepsilon, x)$ sedemikian *sehingga jika $n \geq K(\varepsilon, x)$ maka*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pembaca diajak untuk menunjukkan bahwa hal ini ekuivalen dengan Definisi 2.1. Perlu ditekankan bahwa nilai $K(\varepsilon, x)$ bergantung pada ε dan x. Dalam Contoh 2.1(a)-(c), terdapat dua fakta penting: nilai $K(\varepsilon, x)$ diperlukan untuk memperoleh ketaksamaan $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dengan $n \geq K(\varepsilon, x)$. Intuisi di balik konvergensi titik demi titik adalah bahwa barisan tersebut konvergen "cukup cepat" di beberapa titik dibandingkan di titik lain. Namun, dalam Contoh 2.1(d), seperti yang telah ditunjukkan dalam ketaksamaan (2.2), dimungkinkan untuk memilih K yang bergantung hanya pada ε. Sifat utama ini membedakan antara konvergensi titik demi titik suatu barisan fungsi dan konsep konvergensi seragam.

2.1.1 Konvergensi Seragam

Definisi 2.2

Barisan fugsi (f_n) dari $A \subseteq \mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ konvergen seragam pada $A_0 \subseteq A$ ke suatu fungsi $f : A_0 \to \mathbb{R}$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\varepsilon)$ maka

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ untuk semua } x \in A_0.$$

Dalam kasus ini dikatakan barisan (f_n) konvergen seragam pada A_0. Ini dinotasikan dengan:

$$f_n \rightrightarrows f \text{ pada } A_0 \text{ atau } f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ untuk } x \in A_0.$$

Konsekuensi langsung dari definisi adalah jika barisan (f_n) konvergen seragam pada A_0 ke f, maka barisan ini juga konvergen titik-demi-titik pada A_0 ke f dalam pengertian Definisi 2.1. Selanjutnya amati bahwa konversenya tidak selalu benar dan dapat dilihat melalui Contoh 2.1(a–c); contoh lain akan diberikan di bawah.

Kadang-kadang berguna untuk memiliki kondisi perlu dan cukup untuk barisan (f_n) agar tidak konvergen seragam pada A_0 ke f. Berikut diberikan mengenai hal tersebut yang merupakan bentuk negasi dari Definisi 2.2.

Lema 2.2

Sebuah barisan fungsi (f_n) dari $A_0 \subseteq \mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ tidak konvergen seragam pada A_0 ke sebuah fungsi $f : A_0 \to \mathbb{R}$ jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon_0 > 0$, sebuah subbarisan (f_{n_k}) dari (f_n), *dan sebuah barisan (x_k) di A_0 sehingga*

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0 \quad \textit{untuk semua } k \in \mathbb{N}.$$

Sekarang diberikan contoh bagaimana Lemma 2.2 dapat digunakan.

Contoh 2.2

(a) Perhatikan Contoh 2.1(a). Jika $n_k := k$ dan $x_k := k$, maka

$$f_{n_k}(x_k) - f(x_k) = |1 - 0| = 1.$$

Oleh karena itu, barisan (f_n) tidak konvergen seragam pada $\mathbb{R}$ ke f.

(b) Perhatikan Contoh 2.1(b). Jika $n_k := k$ dan $x_k := \left(\frac{1}{2}\right)^{1/k}$, maka

$$|g_{n_k}(x_k) - g(x_k)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}.$$

Oleh karena itu, barisan (g_n) tidak konvergen seragam pada $(-1, 1]$ ke g.

(c) Pertimbangkan Contoh 2.1(c). Jika $n_k := k$ dan $x_k := -k$, maka $h_{n_k}(x_k) = 0$ dan $h(x_k) = -k$ sehingga $|h_{n_k}(x_k) - h(x_k)| = k$. Oleh karena itu, barisan (h_n) tidak konvergen seragam pada $\mathbb{R}$ ke h.

–

2.1.2 Norm Seragam

Dalam membahas konvergensi seragam, sering kali berguna menggunakan konsep norm seragam pada himpunan fungsi terbatas.

Definisi 2.3

Jika $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $\varphi : A \to \mathbb{R}$ adalah fungsi, dikatakan bahwa φ terbatas pada A jika himpunan $\varphi(A)$ adalah himpunan terbatas di $\mathbb{R}$. Jika φ terbatas, didefinisikan norm seragam dari φ pada A sebagai

$$\|\varphi\|_A := \sup\{|\varphi(x)| : x \in A\}.$$

Perhatikan bahwa ini berlaku jika $K > 0$, maka

$$\|\varphi\|_A \leq K \iff |\varphi(x)| \leq K \quad \text{untuk semua } x \in A. \tag{2.3}$$

Lema 2.3

Misal (f_n) adalah barisan fungsi-fungsi yang terbatas pada $A \subseteq \mathbb{R}$. Barisan fungsi ini konvergen seragam pada A ke f jika dan hanya jika $\|f_n - f\|_A \to 0$.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Jika (f_n) konvergen seragam pada A ke f, maka dari Definisi 2.2, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $K(\varepsilon)$ sehingga jika $n \geq K(\varepsilon)$ dan $x \in A$, maka

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dari definisi supremum, berlaku bahwa $\|f_n - f\|_A < \varepsilon$ untuk $n \geq K(\varepsilon)$. Karena $\varepsilon > 0$ bersifat sebarang, maka $\|f_n - f\|_A \to 0$.

$(\Leftarrow)$ Jika $\|f_n - f\|_A \to 0$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat $H(\varepsilon)$ sehingga jika $n \geq H(\varepsilon)$ maka $\|f_n - f\|_A < \varepsilon$ dan dari (2.3) didapatkan bahwa $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ untuk semua $n \geq H(\varepsilon)$ dan $x \in A$. Oleh karena itu, (f_n) konvergen seragam pada A ke f. ■

Sekarang akan diilustrasikan penggunaan Lema 2.3 sebagai alat untuk memeriksa barisan fungsi terbatas terhadap konvergensi seragam.

Contoh 2.3

(a) Lema 2.3 tidak dapat diterapkan pada barisan di Contoh 2.1(a) karena fungsi $f_n(x) - f(x) = x/n$ tidak terbatas pada $\mathbb{R}$.

Sebagai ilustrasi, misalkan $A := [0, 1]$. Meskipun barisan (x/n) tidak konvergen seragam pada $\mathbb{R}$ ke fungsi nol, akan ditunjukkan bahwa konvergensi ini adalah seragam pada A. Untuk melihat ini, perhatikan bahwa

$$\|f_n - f\|_A = \sup\{|x/n| : 0 \leq x \leq 1\} = \frac{1}{n}.$$

Sehingga $\|f_n - f\|_A \to 0$. Oleh karena itu, (f_n) konvergen seragam pada A ke $f = 0$.

(b) Misalkan $g_n(x) := x^n$ untuk $x \in A := [0, 1]$ dan $n \in \mathbb{N}$, serta $g(x) := 0$ untuk $0 \leq x < 1$ dan $g(1) := 1$. Fungsi $g_n(x) - g(x)$ terbatas pada A dan

$$\|g_n - g\|_A = \sup \left\{ \begin{array}{ll} x^n & \text{untuk } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{untuk } x = 1. \end{array} \right\} = 1.$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\|g_n - g\|_A$ tidak konvergen ke 0, maka bisa disimpulkan bahwa barisan (g_n) tidak konvergen seragam pada A ke g.

(c) Lema 2.3 tidak dapat diterapkan pada barisan di Contoh 2.1(c) karena fungsi $h_n(x) - h(x) = x^2/n$ tidak terbatas pada $\mathbb{R}$.

Sebagai gantinya, misalkan $A := [0, 8]$ dan perhatikan

$$\|h_n - h\|_A = \sup\{x^2/n : 0 \leq x \leq 8\} = \frac{64}{n}.$$

Oleh karena itu, barisan (h_n) konvergen seragam pada A ke $h = 0$.

(d) Jika merujuk pada Contoh 2.1(d), terlihat bahwa $\|F_n - F\|_{\mathbb{R}} \leq 1/n$. Maka, (F_n) konvergen seragam pada $\mathbb{R}$ ke F.

(e) Misalkan $G(x) := x^n(1-x)$ untuk $x \in A := [0,1]$. Amati bahwa barisan $(G_n(x))$ konvergen ke $G(x) := 0$ untuk setiap $x \in A$. Untuk menghitung norm seragam dari $G_n - G = G_n$ pada A, dicari turunan dan diselesaikan

$$G_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x) = 0$$

untuk mendapatkan titik $x_n := n/(n+1)$. Ini adalah titik interior dari $[0,1]$, dan mudah diverifikasi menggunakan Uji Turunan Pertama bahwa G_n mencapai maksimum pada $[0,1]$ di x_n. Oleh karena itu, diperoleh

$$\|G_n\|_A = G_n(x_n) = (1+1/n)^{-n} \cdot \frac{1}{1+1/n},$$

yang konvergen ke $0 \cdot e^{-1} = 0$. Oleh karena itu konvergensi dari (G_n) adalah seragam pada A.

Teorema 2.1 Kriteria Cauchy untuk Konvergensi Seragam

Misalkan (f_n) adalah suatu barisan fungsi-fungsi terbatas pada $A \subseteq \mathbb{R}$. Barisan ini konvergen seragam pada A ke fungsi terbatas f jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan $H(\varepsilon)$ dalam $\mathbb{N}$ sehingga untuk semua $m, n \geq H(\varepsilon)$, berlaku $\|f_m - f_n\|_A < \varepsilon$.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Jika $f_n \to f$ pada A, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat $H(\varepsilon)$ sehingga jika $n \geq H(\varepsilon)$, maka $\|f_n - f\|_A < \varepsilon/2$. Oleh karena itu, jika $m, n \geq H(\varepsilon)$, maka

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

untuk semua $x \in A$. Oleh karena itu, $\|f_m - f_n\|_A < \varepsilon$ untuk $m, n \geq H(\varepsilon)$.

$(\Leftarrow)$ Sebaliknya, misalkan untuk $\varepsilon > 0$ terdapat $H(\varepsilon)$ sehingga jika $m, n \geq H(\varepsilon)$, maka $\|f_m - f_n\|_A < \varepsilon$. Dengan demikian, untuk setiap $x \in A$, berlaku

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_A < \varepsilon \quad \text{untuk } m, n \geq H(\varepsilon). \tag{2.4}$$

Didapat, $(f_n(x))$ adalah barisan Cauchy dalam $\mathbb{R}$; oleh karena itu barisan tersebut adalah konvergen. Didefinisikan $f : A \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{untuk } x \in A.$$

Jika diambil $n \to \infty$ untuk (2.4), maka setiap $x \in A$, berlaku

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{untuk } m \geq H(\varepsilon).$$

Oleh karena itu, barisan (f_n) konvergen seragam pada A ke f.

■

2.1.3 Latihan

1. Tunjukkan bahwa $\lim \dfrac{x}{x+n} = 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
2. Tunjukkan bahwa $\lim \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.
3. Hitung $\lim \dfrac{nx}{1+nx}$ untuk $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
4. Hitung $\lim \dfrac{x^n}{1+x^n}$ untuk $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
5. Hitung $\lim \dfrac{\sin(nx)}{1+nx}$ untuk $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
6. Tunjukkan bahwa $\lim \arctan(nx) = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)$ untuk $x \in \mathbb{R}$.
7. Hitung $\lim e^{-nx}$ untuk $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
8. Tunjukkan bahwa $\lim xe^{-nx} = 0$ untuk $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
9. Tunjukkan bahwa $\lim x^2e^{-nx} = 0$ dan $\lim n^2x^2e^{-nx} = 0$ untuk $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
10. Tunjukkan bahwa $\lim(\cos(\pi x))^{2n}$ ada untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Berapa nilainya?
11. Tunjukkan bahwa jika $a > 0$, maka barisan pada Soal 1 konvergen secara seragam pada interval $[0, a]$, tetapi tidak konvergen secara seragam pada interval $[0, \infty)$.
12. Tunjukkan bahwa jika $a > 0$, maka barisan pada Soal 2 konvergen secara seragam pada interval $[a, \infty)$, tetapi tidak konvergen secara seragam pada interval $[0, \infty)$.
13. Tunjukkan bahwa jika $a > 0$, maka barisan pada Soal 3 konvergen secara seragam pada interval $[a, \infty)$, tetapi tidak konvergen secara seragam pada interval $[0, \infty)$.
14. Tunjukkan bahwa jika $0 < b < 1$, maka barisan pada Soal 4 konvergen secara seragam pada interval $[0, b]$, tetapi tidak konvergen secara seragam pada interval $[0, 1]$.
15. Tunjukkan bahwa jika $a > 0$, maka barisan pada Soal 5 konvergen secara seragam pada interval $[a, \infty)$, tetapi tidak konvergen secara seragam pada interval $[0, \infty)$.
16. Tunjukkan bahwa jika $a > 0$, maka barisan pada Soal 6 konvergen secara seragam pada interval $[a, \infty)$, tetapi tidak konvergen secara seragam pada interval $[0, \infty)$.
17. Tunjukkan bahwa jika $a > 0$, maka barisan pada Soal 7 konvergen secara seragam pada interval $[a, \infty)$, tetapi tidak konvergen secara seragam pada interval $[0, \infty)$.
18. Tunjukkan bahwa barisan pada Soal 8 konvergen secara seragam pada $[0, \infty)$.
19. Tunjukkan bahwa barisan x^2e^{-nx} konvergen secara seragam pada $[0, \infty)$.
20. Tunjukkan bahwa jika $a > 0$, maka barisan $n^2x^2e^{-nx}$ konvergen secara seragam pada interval $[a, \infty)$, tetapi tidak konvergen secara seragam pada interval $[0, \infty)$.

21. Tunjukkan bahwa jika $(f_n), (g_n)$ konvergen secara seragam pada himpunan A ke f, g, masing-masing, maka $(f_n + g_n)$ konvergen secara seragam pada A ke $f + g$.

22. Tunjukkan bahwa jika $f_n(x) := x + 1/n$ dan $f(x) := x$ untuk $x \in \mathbb{R}$, maka (f_n) konvergen secara seragam pada $\mathbb{R}$ ke f, tetapi barisan (f_n^2) tidak konvergen secara seragam pada $\mathbb{R}$. (Dengan demikian, hasil kali dari barisan fungsi yang konvergen secara seragam mungkin tidak konvergen secara seragam.)

23. Misalkan $(f_n), (g_n)$ adalah barisan fungsi terbatas pada A yang masing-masing konvergen secara seragam pada A ke f, g. Tunjukkan bahwa $(f_n g_n)$ konvergen secara seragam pada A ke fg.

24. Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi yang konvergen secara seragam ke f pada A dan memenuhi $|f_n(x)| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan semua $x \in A$. Jika g kontinu pada interval $[-M, M]$, tunjukkan bahwa barisan $(g \circ f_n)$ konvergen secara seragam ke $g \circ f$ pada A.

2.2 Pertukaran limit

Sering kali berguna untuk mengetahui apakah limit dari suatu barisan fungsi merupakan fungsi kontinu, fungsi terdiferensialkan, atau fungsi yang dapat diintegralkan secara Riemann. Sayangnya, tidak selalu terjadi bahwa limit dari suatu barisan fungsi memiliki sifat-sifat berguna tersebut.

Contoh 2.4

(a) Misalkan $g_n(x) := x^n$ untuk $x \in [0, 1]$ dan $n \in \mathbb{N}$. Maka, seperti yang telah dicatat dalam Contoh 2.1(b), barisan (g_n) konvergen pointwise ke fungsi:

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{untuk } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{untuk } x = 1. \end{cases}$$

Meskipun semua fungsi g_n adalah kontinu di $x = 1$, fungsi limit g tidak kontinu di $x = 1$. Ingat bahwa telah ditunjukkan dalam Contoh 2.2(b) bahwa barisan ini tidak konvergen secara seragam ke g pada $[0, 1]$.

(b) Setiap fungsi $g_n(x) := x^n$ dalam bagian (a) memiliki turunan kontinu pada $[0, 1]$. Namun, fungsi limit g tidak memiliki turunan di $x = 1$, karena tidak kontinu di titik tersebut.

(c) Misalkan $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan untuk $n \geq 2$ oleh:

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & \text{untuk } 0 \leq x \leq 1/n, \\ -n^2(x - 2/n) & \text{untuk } 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & \text{untuk } 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Jelas bahwa setiap fungsi f_n kontinu pada $[0,1]$; sehingga dapat diintegralkan secara Riemann. Baik melalui perhitungan langsung, atau dengan merujuk pada makna integral sebagai luas, diperoleh:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \quad \text{untuk } n \geq 2.$$

Pembaca dapat menunjukkan bahwa $f_n(x) \to 0$ untuk semua $x \in [0,1]$; sehingga fungsi limit f bernilai nol dan kontinu (dan karenanya dapat diintegralkan), dan:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Oleh karena itu, didapat hasil:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \neq \lim \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

(d) Diberikan barisan (h_n) yang didefinisikan oleh $h_n(x) := 2nxe^{-nx^2}$ untuk $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Karena $h_n = H_n'$, dengan $H_n(x) := -e^{-nx^2}$, didapat

$$\int_0^1 h_n(x)dx = H_n(1) - H_n(0) = 1 - e^{-n}.$$

Dapat dibuktikan bahwa $h(x) := \lim(h_n(x)) = 0$ untuk semua $x \in [0,1]$ dan

$$\int_0^1 h(x)dx \neq \lim \int_0^1 h_n(x)dx.$$

Terlihat bahwa hipotesis tambahan berupa konvergensi seragam cukup untuk menjamin bahwa limit dari barisan fungsi kontinu adalah kontinu. Hasil serupa juga akan dibuktikan untuk barisan fungsi yang terdiferensialkan dan terintegralkan.

Teorema 2.2

Misal (f_n) barisan fungsi kontinu pada himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Jika (f_n) konvergen seragam pada A ke fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, maka f kontinu pada A.

Bukti. Misal ε sebarang bilangan real positif dan c sebarang bilangan di A.

✿ Karena (f_n) konvergen seragam pada A ke fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, didapatkan $H := H(\varepsilon/3)$ sedemikian sehingga jika $n \geq H$ maka $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ untuk semua $x \in A$.

✿ Karena f_n adalah fungsi kontinu pada A untuk semua $n \in \mathbb{N}$, didapatkan $\delta_n = \delta(\frac{1}{3}, c, f_n)$ sedemikian sehingga jika $|x - c| < \delta_n$ dan $x \in A$ maka $|f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon/3$.

Oleh karena itu, ada $\delta := \delta_H = \delta(\frac{1}{3}, c, f_H)$ sehingga jika $|x - c| < \delta$ dan $x \in A$ maka

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\le |f(x) - f_H(x)| + |f_H(x) - f_H(c)| + |f_H(c) - f(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

☞ Catatan 2.1
Meskipun konvergensi seragam dari barisan fungsi kontinu cukup untuk menjamin kekontinuan fungsi limit, tapi itu bukan syarat perlu (lihat soal latihan pada subbab ini pada soal nomer 2).

2.2.1 Pertukaran Limit dan Turunan

Sekarang ditunjukkan bahwa jika barisan turunan (f_n') konvergen seragam pada interval J, maka barisan (f_n) konvergen seragam pada J ke fungsi f yang mempunyai turunan di setiap titik di J dan $f' = g$.

Teorema 2.3

Misal $J \subseteq \mathbb{R}$ interval terbatas dan misal (f_n) barisan fungsi dari J ke $\mathbb{R}$. Jika ada $x_0 \in J$ sedemikian sehingga $(f_n(x_0))$ konvergen dan barisan turunan (f_n') pada J ada dan konvergen seragam pada J ke fungsi g, maka barisan (f_n) konvergen seragam pada J ke fungsi f yang mempunyai turunan di setiap titik di J dan $f' = g$.

Bukti. ✿ **Bukti (f_n) konvergen seragam pada A (misal $\lim(f_n) = f$)**

Misal a, b adalah titik-titik ujung dari interval J dengan a titik ujung kiri dan b titik ujung kanan. Dengan menerapkan Teorema nilai rata-rata didapatkan bahwa untuk setiap $x \in J$ ada $y \in J$ sehingga

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + \left[f_m'(y) - f_n'(y)\right](x - x_0).$$

Karena $(f_n(x_0))$ konvergen dan (f_n') konvergen seragam pada J, didapatkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $M := M(\varepsilon/(1 + (b - a)))$ sedmikian sehingga jika $m, n \ge M$ maka

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + \left|f_m'(y) - f_n'(y)\right||x - x_0| < \varepsilon.$$

Jadi (f_n) konvergen seragam pada A.

✿ **Bukti f fungsi kontinu**

Karena f_n' ada pada A untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didapatkan f_n kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Lebih lanjut, karena (f_n) konvergen seragam, diperoleh f kontinu.

✿ **Bukti $f'(c)$ ada untuk setiap $c \in J$**

Misal c sebarang bilangan real. Lagi, gunakan Teorema nilai rata didapatkan bahwa untuk setiap $x \in J$ ada $z \in J$ sehingga

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + \left[f'_m(z) - f'_n(z)\right](x - c).$$

Untuk $x \neq c$, didapatkan

$$\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = f'_m(z) - f'_n(z).$$

Karena (f'_n) konvergen seragam pada J, didapatkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $M := M(\varepsilon)$ sedmikian sehingga jika $m, n \geq M$ maka

$$\left|\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}\right| < \varepsilon.$$

Ambil limit terhadap m dari ruas kiri dan kanan diperoleh

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}\right| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Selanjutnya, karena $g(c) = \lim(f'_n(c))$, ada $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n \geq N(\varepsilon)$, maka

$$|f'_n(c) - g(c)| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Sekarang, ambil $K := \max\{M(\varepsilon), N(\varepsilon)\}$. Karena $f'_K(c)$ ada, didapat bahwa terdapat $\delta_K(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x - c| < \delta_K(\varepsilon)$, maka

$$\left|\frac{f_K(x) - f_K(c)}{x - c} - f'_K(c)\right| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Gabungkan (2.5), (2.6) dan (2.7) didapatkan

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c)\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_K(x) - f_K(c)}{x - c}\right| + \left|\frac{f_K(x) - f_K(c)}{x - c} - f'_K(c)\right| \\
&\quad + |f'_K(c) - g(c)| \\
&< 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Sehingga $f'(c)$ ada dan $f'(c) = g(c)$.

■

2.2.2 Pertukaran Limit dan Integral

Kita telah melihat pada Contoh 2.4(c) bahwa jika f_n adalah sebuah barisan fungsi di $\mathcal{R}[a,b]$ yang konvergen pada $[a,b]$ menuju fungsi $f \in \mathcal{R}[a,b]$, maka hal tersebut tidak selalu menjamin bahwa

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Sekarang, akan ditunjukkan bahwa konvergensi seragam dari barisan tersebut cukup untuk menjamin bahwa persamaan ini berlaku.

Teorema 2.4

Misal (f_n) barisan fungsi di $\mathcal{R}[a,b]$. Jika (f_n) konvergen seragam pada $[a,b]$ ke f, maka $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan memenuhi $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

Bukti. ✿ **Bukti $\displaystyle\int_a^b f_n$ konvergen ke suatu bilangan, misal A**

Berdasarkan kriteria Cauchy didapatkan bahwa untuk sebarang bilangan real positif ε ada $H(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $m > n \geq H(\varepsilon)$ maka

$$-\varepsilon < f_m(x) - f_n(x) < \varepsilon \text{ untuk } x \in [a,b].$$

Berdasarkan sifat ketaksamaan pada integral, diperoleh

$$-\varepsilon(b-a) < \int_a^b f_m - \int_a^b f_n < \varepsilon(b-a). \text{ untuk } x \in [a,b].$$

Oleh karena itu $\left(\displaystyle\int_a^b f_m\right)$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$, yang artinya konvergen ke suatu bilangan, misalkan A.

✿ **Bukti $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $\displaystyle\int_a^b f = A = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$**

Karena (f_n) konvergen seragam pada $[a,b]$ ke f, didapatkan $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $m \geq K(\varepsilon)$ maka

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.8}$$

untuk semua $x \in [a,b]$. Jika $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^r$ sebarang partisi bertanda pada $[a,b]$ dan jika $m \geq K(\varepsilon)$, maka dengan menggunakan (2.8) didapat

$$\begin{aligned} |S(f_m;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^n [f_m(t_i) - f(t_i)](x_i - x_{i-1})\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f_m(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sekarang gunakan hasil bahwa barisan $(\int_a^b f_m)$ konvergen ke A, didapatkan ada $M := M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $m \geq M$ maka

$$\left|\int_a^b f_m - A\right| < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Selanjutnya terapkan fakta $f \in \mathcal{R}[a,b]$, didapatkan ada $\delta_{m,\varepsilon} > 0$ sedemikian sehingga jika $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_{m,\varepsilon}$ maka

$$\left|\int_a^b f_m - S(f_m, \dot{\mathcal{P}})\right| \;<\; \varepsilon. \tag{2.11}$$

Gabungkan (2.9), (2.10) dan (2.11), diperoleh $\delta_{m,\varepsilon} > 0$ dengan $m = \max\{K, M\}$ sedemikian sehingga jika $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_{m,\varepsilon}$ maka

$$\begin{aligned} |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - A| &\leq |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f_m;\dot{\mathcal{P}})| + |S(f_m;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_m| + \left|\int_a^b f_m - A\right| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

■

Hipotesis konvergensi seragam merupakan syarat yang sangat ketat dan membatasi penerapan hasil ini. Pada bagian ini, akan dikemukakan sebuah hasil yang tidak memenuhi konvergensi seragam, tetapi mengharuskan fungsi limitnya dapat diintegralkan dalam pengertian Riemann.

Teorema 2.5

Misal (f_n) barisan fungsi di $\mathcal{R}[a,b]$ yang konvergen pada $[a,b]$ ke fungsi $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Jika ada $B > 0$ sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq B$ untuk semua $x \in [a,b]$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka memenuhi

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Bukti. Pembuktiannya sama seperti teorema pertukaran limit dan integral. Perbedaannya terletak pada cara mendapatkan (2.10), yaitu dari asumsi bahwa ada $B > 0$ sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq B$ untuk semua $x \in [a,b]$ dan $n \in \mathbb{N}$, didapatkan barisan $(\int_a^b f_m)$ terbatas dan oleh karena itu terdapat sub-barisan $(\int_a^b f_{r_m})$ yang konvergen misal konvergen ke A. Selanjutnya untuk pertidaksamaan yang lain bisa didapatkan dengan cara yang sama seperti teorema pertukaran limit dan integral. ■

2.2.3 Teorema Dini

Pada subbab ini akan diakhiri dengan sebuah teorema terkenal oleh Ulisse Dini (1845–1918). Di sini pembuktian menggunakan gauge tidak konstan.

Teorema 2.6 Teorem Dini

Jika (f_n) barisan fungsi monoton kontinu pada $I := [a, b]$ yang konvergen pada I ke fungsi kontinu f, maka barisan tersebut kontinu seragam.

Bukti. Misalkan $\{f_n\}$ adalah barisan menurun dan $g_m := f_m - f$. Diperoleh $\{g_m\}$ adalah barisan fungsi kontinu yang menurun dan konvergen pada I ke fungsi 0. Akan ditunjukkan bahwa konvergensi ini seragam pada I.

Diberikan $\varepsilon > 0$, $t \in I$, terdapat $m_{t,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sehingga $0 \leq g_{m_{t,\varepsilon}}(x) < \varepsilon/2$. Karena $g_{m_{t,\varepsilon}}$ kontinu di t, terdapat $\delta_t(\varepsilon) > 0$ sehingga $0 \leq g_{m_{t,\varepsilon}}(x) < \varepsilon$ untuk semua $x \in I$ yang memenuhi $|x - t| < \delta_t(\varepsilon)$. Diperoleh δ_t adalah gauge pada I, dan jika $\dot{\mathcal{P}} = \{([t_{i-1}, t_i], t_i)\}_{i=1}^n$ adalah partisi bertanda δ_t-*fine* dan didefinisikan $M_\varepsilon := \max\{m_{t_1,\varepsilon}, \ldots, m_{t_n,\varepsilon}\}$. Jika $m \geq M_\varepsilon$ dan $x \in I$, maka (dengan Lemma gauges (Lihat Lemma 5.5.3 pada buku Bartles)) terdapat indeks i sehingga $|x - t_i| \leq \delta_{t_i}(\varepsilon)$ dan oleh karena itu

$$0 \leq g_m(x) \leq g_{m_{t_i,\varepsilon}}(x) < \varepsilon.$$

Dengan demikian, barisan $\{g_m\}$ konvergen secara seragam ke fungsi 0. ■

? Latihan

1. Tunjukkan bahwa barisan $x^n/(1+x^n)$ tidak konvergen seragam pada $[0, 2]$, dengan menunjukkan bahwa fungsi limit tidak kontinu pada $[0, 2]$.
2. Konstruksi sebuah barisan fungsi pada $[0, 1]$ yang setiap elemennya tidak kontinu di setiap titik $[0, 1]$ tetapi konvergen seragam ke fungsi yang kontinu pada $[0, 1]$.
3. Misalkan $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi kontinu pada interval I yang konvergen seragam pada I ke fungsi f. Jika $\{x_n\} \subset I$ konvergen ke $x_0 \in I$, tunjukkan bahwa $\lim f_n(x_n) = f(x_0)$.
4. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu seragam pada $\mathbb{R}$ dan $f_n(x) := f(x + 1/n)$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $\{f_n\}$ konvergen seragam pada $\mathbb{R}$ ke f.
5. Misalkan $f_n(x) := 1/(1 + x^n)$ untuk $x \in [0, 1]$. Temukan limit titik demi titik f dari barisan $\{f_n\}$ pada $[0, 1]$. Apakah $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[0, 1]$?
6. Misalkan barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada himpunan A, dan setiap f_n terbatas pada A. Tunjukkan bahwa fungsi f terbatas pada A.
7. Misalkan $f_n(x) := nx/(1 + nx^2)$ untuk $x \in A := [0, \infty)$. Tunjukkan bahwa $\{f_n\}$ konvergen tidak seragam ke fungsi terintegral f pada A, tetapi limit titik demi titik dari barisan tidak terbatas pada A.
8. Misal $f_n(x) = x^n/n$ untuk $x \in [0, 1]$. Tunjukkan bahwa barisan fungsi yang dapat diturunkan f_n konvergen seragam ke fungsi yang dapat diturunkan f pada $[0, 1]$ dan bahwa barisan (f_n') pada $[0, 1]$ konvergen ke fungsi g, tetapi $g(1) \neq f'(1)$.
9. Misalkan $g_n(x) := e^{-nx}$ untuk $x \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Periksa hubungan antara $\lim g_n(x)$ dan $\lim g_n'$.

10. Misalkan $I := [a, b]$ dan $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi kontinu pada I yang konvergen pada I ke f. Misalkan turunan f_n' kontinu pada I dan $\{f_n'\}$ konvergen seragam ke g. Tunjukkan bahwa $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\, dt$ dan bahwa $f'(x) = g(x)$ untuk semua $x \in I$.

11. Tunjukkan bahwa $\int_0^\infty e^{-nx^2} dx = 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

12. Jika $a > 0$, tunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{\sin(nx)}{(nx)^2} dx = 0$. Apa yang terjadi jika $a = 0$?

13. Misalkan $f_n(x) := nx/(1 + nx)$ untuk $x \in [0, 1]$. Tunjukkan bahwa $\{f_n\}$ konvergen tidak seragam ke fungsi terintegral f pada $[0, 1]$ dan bahwa $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

14. Misalkan $g_n(x) := nx(1 - x)^n$ untuk $x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$. Diskusikan konvergensi $\{g_n\}$ dan $\int_0^1 g_n(x)dx$.

15. Misalkan f_n adalah enumerasi bilangan rasional di $I := [0, 1]$ dan misalkan f_n didefinisikan menjadi 1 jika $x = r_1, r_2, \ldots, r_n$ dan sama dengan 0 di tempat lain. Tunjukkan bahwa f adalah fungsi terintegral Riemann untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, bahwa $\{f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots\}$, dan bahwa $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ adalah fungsi Dirichlet yang tidak terintegral Riemann pada $[0, 1]$.

16. Misalkan $f_n(x) := 1$ untuk $x \in (0, 1/n)$ dan $f_n(x) := 0$ untuk x lainnya di $[0, 1]$. Tunjukkan bahwa $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi menurun tidak kontinu yang konvergen ke fungsi kontinu tetapi tidak seragam pada $[0, 1]$.

17. Misalkan $f_n(x) := x^n$ untuk $x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi kontinu yang menurun ke fungsi kontinu, tetapi konvergensinya tidak seragam pada $[0, 1]$.

18. Misalkan $f_n(x) := x/n$ untuk $x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi kontinu yang menurun ke fungsi limit kontinu, tetapi konvergensinya tidak seragam pada $[0, \infty)$.

19. Berikan contoh barisan menurun $\{f_n\}$ dari fungsi kontinu pada $[0, 1]$ yang konvergen ke fungsi kontinu, tetapi konvergensinya tidak seragam pada $[0, 1]$.

Bab 3 Deret Tak Hingga

3.1 Konvergen Mutlak

Definisi 3.1 Deret Tak Hingga

Jika $X := (x_n)$ suatu barisan di $\mathbb{R}$, maka **deret tak hingga** (atau disederhanakan **deret**) dibangun oleh X adalah barisan $S := (s_k)$ yang didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} s_1 &:= x_1 \\ s_2 &:= s_1 + x_2 \; (= x_1 + x_2) \\ &\vdots \\ s_k &:= s_{k-1} + x_k \; (= x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bilangan x_n disebut suku-suku deret tersebut, dan bilangan s_k disebut jumlah parsial deret tersebut. Jika $\lim\ S$ ada, kita katakan bahwa deret ini konvergen dan menyebut limit ini sebagai jumlah atau nilai deret tersebut. Jika limit ini tidak ada, maka deret S dikatakan divergen.

Definisi 3.2 Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Misal $X := (x_n)$ suatu barisan di $\mathbb{R}$. Dikatakan bahwa deret $\sum x_n$ **konvergen mutlak** jika deret $\sum |x_n|$ konvergen di $\mathbb{R}$. Deret dikatakan **konvergen bersyarat** (atau tidak mutlak) jika konvergen, tetapi tidak konvergen mutlak.

Teorema 3.1 Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Jika deret $\sum x_n$ di $\mathbb{R}$ konvergen mutlak, maka $\sum x_n$ juga konvergen.

Bukti. Karena $\sum |x_n|$ konvergen, diperoleh $\sum |x_n|$ adalah barisan Cauchy dan oleh karena itu untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $m > n \geq M(\varepsilon)$, maka

$$|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_m| < \varepsilon.$$

Kemudian berdasarkan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_m| < \varepsilon,$$

dengan $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Oleh karena itu $\sum x_n$ konvergen. ■

3.1.1 Pengelompokan

Diberikan suatu deret $\sum x_n$. Dapat dikonstruksi deret $\sum y_k$ lainnya dengan membiarkan urutan suku x_n dan menyisipkan tanda kurung yang mengelompokkan sejumlah suku berhingga. Sebagai contoh perhatikan pengelompokan deret harmonik berganti tanda berikut

$$1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{9} - \cdots + \frac{1}{13}\right) - \cdots .$$

Fakta menariknya adalah pengelompokan seperti itu tidak mempengaruhi konvergensi dan nilai konvergennya.

Teorema 3.2 Pengelompokan Deret

Jika deret $\sum x_n$ konvergen, maka setiap deret yang diperoleh dari deret tersebut dengan melakukan pengelompokan juga konvergen dan nilai konvergensinya sama.

Jelas bahwa kebalikan dari teorema ini tidak benar. Misal pengelompokan deret berganti tanda $\sum(-1)^n$ diberikan oleh

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots .$$

Bisa diamati pengelompokan tersebut konvergen, tetapi deret $\sum(-1)^n$ divergen.

Bukti. Misal deret $\sum y_n$ adalah deret yang diperoleh dari deret $\sum x_n$ dengan melakukan pengelompokan. Dengan demikian bisa dituliskan

$$y_1 := x_1 + \cdots + x_k, \quad y_2 := x_{k_1+1} + \cdots + x_{k_2}, \cdots$$

dengan $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$. Jika s_n menyatakan jumlahan parsial ke-n dari $\sum x_i$ dan t_k menyatakan jumlahan parsial ke-k dari $\sum y_i$, maka diperoeh

$$t_1 = y_1 = s_{k_1},\ t_2 = y_1 + y_2 = s_{k_2}, \cdots .$$

Oleh karena itu barisan (t_n) merupakan sub-barisan dari (s_n). Karena (s_n) konvergen, diperoleh barisan (t_n) juga konvergen dan nilai konvergensinya sama. ■

Definisi 3.3 Penyusunan Ulang Deret

eret $\sum y_n$ di $\mathbb{R}$ adalah penyusunan ulang dari deret $\sum x_n$ jika ada fungsi bijektif $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $y_k = x_{f(k)}$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$.

Sederhananya, "penyusunan ulang" suatu deret $\sum x_n$ adalah deret lain yang diperoleh dari deret $\sum x_n$ dengan menggunakan semua suku tepat satu kali tetapi mengacak urutan pengambilan sukunya.

Jika $\sum x_n$ merupakan deret konvergen bersyarat di $\mathbb{R}$, dan jika c sebarang bilangan real, maka terdapat penyusunan ulang yang konvergen ke c. Untuk membuktikan pernyataan ini, pertama-tama kita perhatikan bahwa suatu deret konvergen bersyarat harus mengandung suku-suku positif yang sebanyak tak terhingga dan suku-suku negatifnya juga sebanyak tak terhingga, dan baik deret suku-suku positif maupun deret suku-suku negatifnya divergen. Untuk membuat suatu deret yang konvergen ke c, diambil suku-suku positif sampai jumlah parsialnya lebih besar dari c, lalu diambil suku-suku negatifnya sampai jumlah parsialnya kurang dari c. Lakukan ini seterusnya, sehingga didapat deret yang konvergen ke-c.

3.1.2 Penyusunan Ulang Deret

Teorema 3.3

Jika $\sum x_n$ adalah deret yang konvergen mutlak di $\mathbb{R}$ dan $\sum x_n$ konvergen ke x maka sebarang penyusunan ulang $\sum y_k$ dari $\sum x_n$ konvergen ke x.

Bukti. Misal $\sum x_n$ adalah deret yang konvergen mutlak di $\mathbb{R}$ dan $\sum x_n$ konvergen ke x. Oleh karena itu, untuk sebarang $\varepsilon > 0$, ada $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n, q > N$ dan $s_n := x_1 + \cdots + x_n$, maka

$$|x - s_n| < \varepsilon \text{ dan } \sum_{k=N+1}^{q} |x_k| < \varepsilon.$$

Misal $M \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga semua suku $x_1, \cdots, x_N$ termuat dalam jumlahan $\{y_1, y_2, \cdots, y_M$ Perhatikan bahwa jika $m \geq M$ dan $t_m := y_1 + \cdots + y_m$, maka ada $q > N$ sehingga $x_1, \cdots, x_n$ dan $y_1, \cdots, y_m$ termuat dalam $\{x_1, \cdots, x_q\}$ sehingga

$$|x - t_m| \leq |x - s_n| + |s_n - t_m| \quad \leq \quad |x - s_n| + \sum_{k=N+1}^{q} |x_k| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

■

3.1.3 Latihan

1. Tunjukkan bahwa jika suatu deret konvergen hanya memuat sejumlah suku negatif yang berhingga, maka deret tersebut konvergen mutlak.
2. Tunjukkan bahwa jika suatu deret konvergen bersyarat, maka deret yang diperoleh dari suku-suku positifnya adalah divergen, dan deret yang diperoleh dari suku-suku negatifnya adalah divergen.
3. Jika $\sum a_n$ konvergen bersyarat, berikan argumen untuk menunjukkan bahwa terdapat penyusuna ulang yang jumlah parsialnya divergen ke ∞.
4. Jika $\sum a_n$ konvergen mutlak dan (b_n) barisan terbatas, tunjukkan bahwa $\sum a_n b_n$ konvergen mutlak.

5. Jika (a_n) adalah barisan turun dari bilangan real positif dan jika $\sum a_n$ konvergen, tunjukkan bahwa $\lim(na_n) = 0$.

3.2 Uji Konvergen Mutlak

3.2.1 Uji Banding

Teorema 3.4

Misal $X := (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ barisan bilangan real dan ditentukan bahwa untuk $K \in \mathbb{N}$ didapatkan

$$0 \leq x_n \leq y_n, \text{ untuk } n \geq K.$$

(a) *Jika deret $\sum y_n$ konvergen, maka deret $\sum x_n$ juga konvergen.*

(b) *Jika deret $\sum x_n$ divergen, maka deret $\sum y_n$ juga divergen.*

Bukti. Di sini hanya dibuktikan bagian (a), karena (b) kontrapositif dari (a). Misal deret $\sum y_n$ konvergen dan diberikan $\varepsilon > 0$. Berdasarkan kriteria Cauchy untuk deret, diperoleh bahwa ada $M(\varepsilon) > 0$ sedemikian hingga jika $m > n \geq M(\varepsilon)$, maka

$$y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon.$$

Jika $n > \sup\{K, M(\varepsilon)\}$, maka didapat

$$0 \leq x_{n+1} + \cdots + x_m \leq y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon,$$

yang artinya deret $\sum x_n$ konvergen. ■

3.2.2 Uji Banding Limit

Teorema 3.5

isal $X := (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ barisan real tak-nol dan ditentukan bahwa limit di bawah ini ada di $\mathbb{R}$:

$$r := \lim \left| \frac{x_n}{y_n} \right|. \tag{3.1}$$

(a) *Jika $r \neq 0$, maka $\sum x_n$ konvergen mutlak jika dan hanya jika $\sum y_n$ konvergen mutlak.*

(b) *Jika $r = 0$ dan $\sum y_n$ konvergen mutlak maka $\sum x_n$ konvergen mutlak.*

Bukti. (a) Misal $r \neq 0$. Berdasarkan (3.1) diperoleh bahwa ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{2}r \leq |x_n|/|y_n| \leq \frac{3}{2}r$ untuk $n \geq K$. Akibatnya didapatkan $\frac{1}{2}r|y_n| \leq |x_n| \leq \frac{3}{2}r|y_n|$, untuk $n \geq K$. Dengan menggunakan uji banding, sehingga didapatkan (a).

(b) Sekarang, misal $r = 0$. Dengan menggunakan (3.1) diperoleh bahwa ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $0 \leq |x_n|/|y_n| \leq 1$ untuk $n \geq K$. Hal ini berimplikasi bahwa $0 \leq |x_n| \leq |y_n|$, untuk $n \geq K$. Lagi, gunakan uji banding, sehingga didapatkan (b). ■

Contoh 3.1

Dengan menggunakan uji banding limit, periksa kekonvergenan deret:

$$\sum \frac{1}{n^2}.$$

3.2.3 Uji Akar

Teorema 3.6

Misal $X = (x_n)$ barisan di $\mathbb{R}$.

(a) *Jika ada $r \in \mathbb{R}$ dengan $r < 1$ dan $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

$$|x_n|^{1/n} \leq r, \quad \textit{untuk } n \geq K, \tag{3.2}$$

maka deret $\sum x_n$ konvergen mutlak.

(b) *Jika ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

$$|x_n|^{1/n} \geq 1, \quad \textit{untuk } n \geq K, \tag{3.3}$$

maka deret $\sum x_n$ divergen.

Bukti. **Bukti:** (a) Berdasarkan (3.2) diperoleh $|x_n| \leq r^n$ untuk $n \geq K$. Dengan menggunakan Uji Banding dan dengan menggunakan fakta bahwa deret geometri $\sum r^n$ konvergen, didapatkan deret $\sum x_n$ konvergen. (b) Dari (3.3) didapatkan $|x_n| \geq 1$ untuk $n \geq K$. Dengan menerapkan Uji Banding dan menggunakan fakta bahwa deret $\sum 1$ divergen, diperoleh deret $\sum x_n$ divergen. ■

Akibat 3.1

Misal $X = (x_n)$ barisan di $\mathbb{R}$ dan ditentukan

$$r := \lim |x_n|^{1/n} \tag{3.4}$$

ada di $\mathbb{R}$. Didapatkan bahwa $\sum x_n$ konvergen mutlak saat $r < 1$ dan divergen saat $r > 1$.

☞ **Catatan 3.1**

Jika $r = 1$, maka deret mungkin konvergen ataupun divergen, sehingga perlu uji yang lain.

Bukti. **Bukti:** Jika limit di (3.4) ada dan $r < 1$ maka untuk $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n|^{1/n} < r + \varepsilon$ untuk $n > K$. Berdasarkan sifat kepadatan bilangan real, diperoleh $r_1 \in \mathbb{R}$ sehingga $r < r_1 < 1$. Sekarang pilih $\varepsilon = r_1 - r$, didapatkan $|x_n|^{1/n} < r_1$ untuk $n > K$. Dengan menerapkan Teorema Uji Akar (a), bisa disimpulkan deret $\sum x_n$ konvergen.
Lebih lanjut jika limit di (3.4) ada dan $r > 1$ maka untuk $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n|^{1/n} > r - \varepsilon$ untuk $n > K$. Berdasarkan sifat kepadatan bilangan real, diperoleh $r_1 \in \mathbb{R}$ sehingga $1 < r_1 < r$. Sekarang pilih $\varepsilon = r - r_1$, didapatkan $|x_n|^{1/n} > r_1 > 1$ untuk $n > K$. Dengan menerapkan Teorema Uji Akar (b), bisa disimpulkan deret $\sum x_n$ divergen. ■

Contoh 3.2

Dengan menggunakan uji akar, periksa kekonvergenan deret:

$$\sum \frac{1}{n^p}, \text{ untuk } p > 0.$$

3.2.4 Uji Rasio

Teorema 3.7

Misal $X = (x_n)$ barisan tak-nol di $\mathbb{R}$.

(a) *Jika ada $r \in \mathbb{R}$ dengan $0 < r < 1$ dan $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq r, \quad \text{untuk } n \geq K, \tag{3.5}$$

maka deret $\sum x_n$ konvergen mutlak.

(b) *Jika ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1, \quad \text{untuk } n \geq K, \tag{3.6}$$

maka deret $\sum x_n$ divergen.

Bukti. (a) Jika (3.5) terpenuhi untuk $0 < r < 1$, maka diperoleh $|x_{K+m}| \leq |x_K| r^m$ untuk $m \in \mathbb{N}$. Dengan menggunakan Uji Banding dan dengan menggunakan fakta bahwa deret geometri $\sum |x_K| r^n$ konvergen, didapatkan deret $\sum x_n$ konvergen. (b) Jika (3.6) terpenuhi, maka diperoleh $|x_{K+m}| \geq |x_K|$ untuk $m \in \mathbb{N}$. Dengan menggunakan Uji Banding dan dengan menggunakan fakta bahwa deret $\sum |x_K|$ divergen, didapatkan deret $\sum x_n$ divergen. ■

Akibat 3.2

Misal $X = (x_n)$ barisan tak-nol di $\mathbb{R}$ dan ditentukan

$$r := \lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \tag{3.7}$$

ada di $\mathbb{R}$. Didapatkan bahwa $\sum x_n$ konvergen mutlak saat $r < 1$ dan divergen saat $r > 1$.

☞ Catatan 3.2
Jika $r = 1$, maka deret mungkin konvergen ataupun divergen, sehingga perlu uji yang lain.

Bukti. Jika limit di (3.7) ada dan $r < 1$ maka untuk $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_{n+1}/x_n| < r + \varepsilon$ untuk $n > K$. Berdasarkan sifat kepadatan bilangan real, diperoleh $r_1 \in \mathbb{R}$ sehingga $r < r_1 < 1$. Sekarang pilih $\varepsilon = r_1 - r$, didapatkan $|x_{n+1}/x_n| < r_1$ untuk $n > K$. Dengan menerapkan Teorema Uji Rasio (a), bisa disimpulkan deret $\sum x_n$ konvergen. Lebih lanjut jika limit di (3.7) ada dan $r > 1$ maka untuk $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_{n+1}/x_n| > r - \varepsilon$ untuk $n > K$. Berdasarkan sifat kepadatan bilangan real, diperoleh $r_1 \in \mathbb{R}$ sehingga $1 < r_1 < r$. Sekarang pilih $\varepsilon = r - r_1$, didapatkan $|x_{n+1}/x_n| > r_1 > 1$ untuk $n > K$. Dengan menerapkan Teorema Uji Rasio (b), bisa disimpulkan deret $\sum x_n$ divergen. ■

Contoh 3.3

Dengan menggunakan uji rasio, periksa kekonvergenan deret:

$$\sum \frac{1}{n^p}, \text{ untuk } p > 0.$$

3.2.5 Uji Integral

Jika f di $\mathcal{R}[a, b]$ untuk setiap $b > a$ dan jika $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt$ ada di $\mathbb{R}$, maka integral tak wajar didefinisikan oleh $\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt$.

Teorema 3.8

Misalkan f adalah fungsi positif dan menurun pada $\{t : t \geq 1\}$. Maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergen jika dan hanya jika integral tak wajar

$$\int_1^\infty f(t)\,dt$$

ada. Lebih lanjut, jumlahan parsial $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ dan jumlahan $s = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ memenuhi

$$\int_{n+1}^\infty f(t)\,dt \leq s - s_n \leq \int_n^\infty f(t)\,dt.$$

Bukti. Karena f fungsi positif dan menurun pada interval $[k-1,k]$, diperoleh

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leq f(k-1). \tag{3.8}$$

Dengan menambahkan pertidaksamaan ini untuk $k = 2, 3, \cdots, n$, didapatkan

$$s_n - f(1) \leq \int_{1}^{n} f(t)\,dt \leq s_{n-1},$$

yang menunjukkan bahwa kedua limit di bawah ini ada atau tidak ada:

$$\lim_{n\to\infty} s_n, \; \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(t)\,dt.$$

Lebih lanjut, jika kedua limit di atas ada, maka dengan menambahkan pertidaksamaan (3.8) untuk $k = n+1, \cdots, m,$ diperoleh

$$s_m - s_n \leq \int_n^m f(t)\,dt \leq s_{m-1} - s_{n-1}$$

dan juga didapatkan $\int_{n+1}^{m+1} f(t)\,dt \leq s_m - s_n \leq \int_n^m f(t)\,dt$. Ambil $m \to \infty$, diperoleh $\int_{n+1}^{\infty} f(t)\,dt \leq s - s_n \leq \int_n^{\infty} f(t)\,dt.$ ■

Contoh 3.4

Dengan menggunakan uji integral, periksa kekonvergenan deret:

$$\sum \frac{1}{n^p}, \text{ untuk } p > 0.$$

3.2.6 Uji Raabe

Teorema 3.9

isal $X = (x_n)$ barisan tak-nol di $\mathbb{R}$.

1. *Jika ada $a > 1$ dan $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq 1 - \frac{a}{n}, \quad \text{untuk } n \geq K, \tag{3.9}$$

maka deret $\sum x_n$ konvergen mutlak.

2. *Jika ada bilangan real $a \leq 1$ dan $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1 - \frac{a}{n}, \quad \text{untuk } n \geq K, \tag{3.10}$$

maka deret $\sum x_n$ tidak konvergen mutlak.

Bukti. (a) Jika (3.9) terpenuhi, maka didapatkan

$$k|x_{k+1}| \leq (k-1)|x_k| - (a-1)|x_k|, \text{ untuk } k \geq K$$

yang ekivalen dengan

$$(k-1)|x_k| - k|x_{k+1}| \geq (a-1)|x_k| > 0, \text{ untuk } k \geq K. \tag{3.11}$$

Tambahkan (3.11) untuk $k = K, \cdots, n$, didapatkan

$$(K-1)|x_K| \geq (K-1)|x_K| - n|x_{n+1}| \geq (a-1)(|x_K| + \cdots + |x_n|).$$

Ini menunjukkan bahwa jumlahan parsial dari deret $\sum |x_n|$ terbpada dan didapatkan deret $\sum x_n$ konvergen mutlak.
(b) Jika (3.10) terpenuhi, maka karena $a \leq 1$, diperoleh

$$n|x_{n+1}| \geq (n-a)|x_n| \geq (n-1)|x_n|, \text{ untuk } n \geq K.$$

Dengan induksi didapatkan $n|x_{n+1}| \geq (K-1)|x_K| := c$, untuk semua $n \geq K$. Tetapi deret harmonik $\sum 1/n$ divergen, sehingga berdasarkan uji banding didapat deret $\sum |x_n|$ divergen. ■

Akibat 3.3

Misal $X = (x_n)$ barisan tak-nol di $\mathbb{R}$ dan ditentukan

$$a := \lim \left(n \left(1 - \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \right) \right) \tag{3.12}$$

ada di $\mathbb{R}$. Didapatkan bahwa $\sum x_n$ konvergen mutlak saat $a > 1$ dan tidak konvergen mutlak saat $a < 1$.

☞ **Catatan 3.3**
ika $a = 1$, maka deret mungkin konvergen ataupun divergen, sehingga perlu uji yang lain.

Bukti. Jika limit di (3.12) ada dan $a > 1$ maka untuk $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n(1 - |x_{n+1}/x_n|) > a - \varepsilon$ untuk $n > K$. Berdasarkan sifat kepadatan bilangan real, diperoleh $r_1 \in \mathbb{R}$ sehingga $1 < a_1 < a$. Sekarang pilih $\varepsilon = a - a_1$, didapatkan $|x_{n+1}/x_n| < 1 - (a_1/n)$. Dengan menggunakan Teorema Uji Raabe (a), didapatkan $\sum x_n$ konvergen. Selanjutnya, jika $a < 1$ maka untuk $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n(1 - |x_{n+1}/x_n|) < a + \varepsilon$ untuk $n > K$. Berdasarkan sifat kepadatan bilangan real, diperoleh $a_1 \in \mathbb{R}$ sehingga $a < a_1 < 1$. Sekarang pilih $\varepsilon = r_1 - r$, didapatkan $|x_{n+1}/x_n| > 1 - (a_1/n)$ untuk $n > K$. Dengan menerapkan Teorema Uji Raabe (b), bisa disimpulkan deret $\sum x_n$ divergen. ■

Contoh 3.5

engan menggunakan uji Raabe, periksa kekonvergenan deret:

$$\sum \frac{1}{n^p}, \text{ untuk } p > 0 \text{ dan } \sum \frac{n}{n^2+1}.$$

3.2.7 Latihan

1. Jika $\sum a_n$ merupakan deret konvergen mutlak, maka deret $\sum a_n \sin nx$ konvergen mutlak dan seragam.
2. Misalkan (c_n) adalah barisan bilangan positif yang menurun. Jika $\sum c_n \sin nx$ konvergen seragam, maka $\lim(nc_n) = 0$.
3. Tunjukkan bahwa jari-jari konvergensi R dari deret pangkat $\sum a_n x^n$ diberikan oleh $\lim(|a_n/a_{n+1}|)$ saat limit ini ada. Berikan contoh deret pangkat yang limitnya tidak ada.
4. Jika $0 < p \leq |a_n| \leq q$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, dapatkan radius konvergensi dari deret $\sum a_n x^n$.
5. Misal $f(x) = \sum a_n x^n$ untuk $|x| < R$. Jika $f(x) = f(-x)$ untuk semua $|x| < R$, tunjukkan bahwa $a_n = 0$ untuk semua n yang ganjil.

3.3 Deret Fungsi

Definisi 3.4 Deret Fungsi dan Konvergensi

Jika (f_n) barisan fungsi yang didefinisikan pada $D \subseteq \mathbb{R}$ dengan nilai di $\mathbb{R}$, barisan jumlahan parsial s_n dari deret tak-hingga $\sum f_n$ yang didefinisikan untuk $x \in D$ dengan

$$\begin{aligned} s_1(x) &:= f_1(x), \\ s_2(x) &:= s_1(x) + f_2(x), \\ &\vdots \\ s_{n+1}(x) &:= s_n(x) + f_{n+1}(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Jika barisan fungsi (s_n) konvergen pada D ke fungsi f, maka barisan tak-hingga $\sum f_n$ dikatakan konvergen ke f pada D. Di sini, jika nilai limit dari deret $\sum f_n$ ada, nilainya dinotasikan sebagai $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Jika deret $\sum |f_n(x)|$ konvergen untuk setiap $x \in D$, maka deret $\sum f_n$ disebut konvergen mutlalk pada D. Jika barisan (s_n) dari jumlahan parsial konvergen seragam ke f pada D, maka $\sum f_n$ disebut konvergen seragam pada D.

Teorema 3.10 Deret Fungsi Kontinu

Jika fungsi f_n bernilai real dan kontinu pada $D \subseteq \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan jika $\sum f_n$ konvergen seragam ke f pada D, maka f kontinu pada D.

Teorema 3.11 Deret Fungsi Terintegral Riemann

Diberikan fungsi f_n bernilai real dan terintegral Riemann pada interval $J := [a, b]$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Jika deret $\sum f_n$ konvergen seragam ke f pada J, maka f terintegral Riemann dan

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Teorema 3.12 Deret Fungsi Yang Dapat Diturunkan

Untuk masing-masing $n \in \mathbb{N}$, misalkan f_n fungsi bernilai real pada $J := [a, b]$ yang mempunyai turunan f_n' pada J. Jika deret $\sum f_n$ konvergen paling sedikit di satu titik pada J dan bahwa deret $\sum f_n'$ konvergen seragam pada J, maka ada fungsi bernilai real f pada J sedemikian sehingga $\sum f_n$ konvergen seragam pada J ke f. Lebih lanjut, f mempunyai turunan pada J and $f' = \sum f_n'$.

3.3.1 Uji Konvergensi Seragam

Teorema 3.13 Kriteria Cauchy

Misal (f_n) barisan fungsi bernilai real pada $D \subseteq R$. Deret $\sum f_n$ konvergensi seragam pada D jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $m > n \geq M(\varepsilon)$, maka

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon, \text{ untuk semua } x \in D.$$

Teorema 3.14 Uji-M Weierstrass

Misal (M_n) barisan bilangan real positif sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq M_n$ untuk $x \in D$ and $n \in \mathbb{N}$. Jika deret $\sum M_n$ konvergen, maka $\sum f_n$ konvergen seragam pada D.

Bukti. Karena deret $\sum M_n$ konvergen dan berdasarkan kriteria Cauchy, didapatkan bahwa ada $M = M(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $m > n \geq M$, maka

$$M_{n+1} + \cdots + M_m < \varepsilon \text{ untuk } x \in D.$$

Lebih lanjut, karena $|f_n(x)| \leq M_n$ untuk $x \in D$ and $n \in \mathbb{N}$, diperoleh $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon$ untuk $x \in D$ yang artinya $\sum f_n$ konvergen seragam pada D. ∎

Definisi 3.5 Deret Pangkat Sekitar $x = c$

Deret fungsi bernilai real $\sum f_n$ dikatakan deret pangkat di sekitar $x = c$ jika fungsi f_n mempunyai bentuk

$$f_n(x) = a_n(x-c)^n,$$

dengan a_n dan c di $\mathbb{R}$ dan $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Definisi 3.6 Radius Konvergensi

Misal $\sum a_n x^n$ deret pangkat. Jika barisan $|a_n|^{1/n}$ terbatas, maka didefinisikan $\rho := \limsup(|a_n|^{1/n})$. Sebaliknya jika barisan $|a_n|^{1/n}$ tidak terbatas maka didefinisikan $\rho := +\infty$. Didefinisikan radius konvergensi dari $\sum a_n x^n$ diberikan oleh

$$R := \begin{cases} 0 & \text{if } \rho = +\infty, \\ 1/\rho & \text{if } 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty & \text{if } \rho = 0. \end{cases}$$

Lebih lanjut interval konvergensi diberikan oleh $(-R, R)$.

Definisi 3.7 Limit Superior

Misal $X = (x_n)$ barisan bilangan reall terbatas. Limit superior dari barisan (x_n) adalah infimum dari himpunan

$$V = \{v \in \mathbb{R} : \text{ ada paling banyak sejumlah hingga } n \in \mathbb{N} \text{ sehingga } v < x_n\}.$$

Akibat 3.4

Misal $X = (x_n)$ barisan bilangan real tak-negatif terbatas. Limit superior dari barisan (x_n) adalah infimum dari himpunan

$$\begin{aligned} V &= \{v \in \mathbb{R} : x_n \leq v \text{ untuk semua } n \text{ yang cukup besar}\} \\ &= \{v \in \mathbb{R} : \text{ ada } M \in \mathbb{N} \text{ sehingga } x_n \leq v, \text{ untuk semua } n \geq M\}. \end{aligned}$$

Berikut fakta yang diperlukan:

- Jika $v > \limsup(x_n)$, maka ada $M \in \mathbb{N}$ sehingga $x_n \leq v$ untuk semua $n \geq M$.
- Jika $w < \limsup(x_n)$, maka ada $M \in \mathbb{N}$ sehingga $x_n \geq w$ untuk semua $n \geq M$.

Teorema 3.15 Teorema Cauchy-Hadamard

Jika R adalah radius konvergensi dari deret pangkat $\sum a_n x^n$, maka deret tersebut konvergen absolut jika $|x| < R$ dan divergen jika $|x| > R$.

Bukti:

Bukti. ✿ Kasus $0 < R < \infty$

❀ Jika $0 < |x| < R$, maka ada bilangan positif $c < 1$ sedemikian sehingga $|x| < cR$. Oleh karena itu $\rho < c/|x|$ dan berimplikasi bahwa ada $M \in \mathbb{N}$ sehingga $|a_n|^{1/n} \leq c/|x|$, untuk semua $n \geq M$. Ini ekivalen ke pernyataan bahwa

$$|a_n x^n| \leq c^n$$

untuk semua $n \geq M$. Karena $c < 1$, maka deret $\sum c^n$ konvergen. Dengan menerapkan Uji Banding didapatkan deret $\sum a_n x^n$ konvergen mutlak.

❀ Jika $|x| > R = 1/\rho$, maka ada $M \in \mathbb{N}$ sehingga $|a_n|^{1/n} > 1/|x|$ untuk semua $n \geq M$. Oleh karena itu, $|a_n x^n| > 1$ untuk semua $n \geq M$, sehingga deret $\sum a_n x^n$ tidak konvergen.

✿ Kasus $R = 0$ atau $\rho = \limsup(|a_n|^{1/n}) = +\infty$
Jika $\rho = \limsup(|a_n|^{1/n}) = +\infty$, maka $\limsup(|a_n|^{1/n}) > r$ untuk setiap $r > 0$. Oleh karena itu untuk setiap $r > 0$ ada $M_r \in \mathbb{N}$ sehingga $|a_n|^{1/n} \geq r$ untuk semua $n \geq M_r$. Untuk $x \neq 0$, ambil $r = 1/|x|$ dan didapatkan $M \in \mathbb{N}$ sehingga $|a_n x^n| \geq 1$ untuk semua $n \geq M$. Karena $\sum 1$ divergen didapat deret $\sum |a_n x^n|$ juga divergen untuk semua $|x| > 0$.

✿ Kasus $R = +\infty$ atau $\rho = \limsup(|a_n|^{1/n}) = 0$
Jika $\limsup(|a_n|^{1/n}) = 0$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $M \in \mathbb{N}$ sehingga $\sup_{n \geq m} |a_n|^{1/n} < \varepsilon$ untuk semua $m \geq M$. Ini artinya $|a_m|^{1/m} < \varepsilon$ untuk semua $m \geq M$. Sekarang ambil $\varepsilon = c/|x|$ dengan $x \neq 0$ dan $0 < c < 1$, sehingga diperoleh $|a_m x^m| < c^m$ untuk semua $m \geq M$. Ini ekivalen ke pernyataan bahwa

$$|a_n x^n| \leq c^n$$

untuk semua $n \geq M$. Karena $c < 1$, maka deret $\sum c^n$ konvergen. Dengan menerapkan Uji Banding didapatkan deret $\sum a_n x^n$ konvergen mutlak.

■

Teorema 3.16 Deret Pangkat Konvergen Seragam

Misal R adalah radius konvergensi dari deret pangkat $\sum a_n x^n$. Jika K adalah interval tertutup terbatas yang termuat pada interval konvergensi $(-R, R)$, maka deret pangkat konvergen seragam pada K.

Bukti. ✿ Kasus $0 < R < \infty$
Karena K adalah interval tertutup terbatas pada interval $(-R, R)$, didapatkan bahwa ada $a, b \in (-R, R)$ sehingga $K = [a, b]$. Lebih lanjut, juga didapatkan $-R < -Q \leq a$ dan $b \leq Q < R$ dengan $Q = \max\{|a|, |b|\} \leq a$. Oleh karena itu, $|x| \leq Q$ untuk setiap $x \in K$

dengan $Q < R$. Itu artinya, $|x| \leq cR$ untuk setiap $x \in K$ dengan $0 < c = Q/R < 1$. Dengan demikian $\rho \leq c/|x|$ dan berimplikasi bahwa ada $M \in \mathbb{N}$ sehingga $|a_n|^{1/n} \leq c/|x|$, untuk semua $n \geq M$. Ini ekivalen ke pernyataan bahwa

$$|a_n x^n| \leq c^n$$

untuk semua $n \geq M$. Karena $0 < c < 1$, maka deret $\sum c^n$ konvergen. Dengan menerapkan uji-M Weierstrass didapatkan deret $\sum a_n x^n$ konvergen seragam.

✿ Kasus $R = 0$
Tidak ada yang perlu dibuktikan, karena tidak ada himpunan tertutup terbatas K.

✿ Kasus $R = \infty$
Mengikuti bukti Teorema Cauchy-Hadamard, didapatkan bahwa ada $M \in \mathbb{N}$ sehingga

$$|a_n x^n| \leq c^n, \text{ untuk } n \geq M, x \in K$$

dengan $0 < c < 1$. Karena $0 < c < 1$, maka deret $\sum c^n$ konvergen. Dengan menerapkan uji-M Weierstrass didapatkan deret $\sum a_n x^n$ konvergen seragam.

■

☞ Catatan 3.4
Perhatikan deret berikut:

$$\sum x^n, \ \sum \frac{1}{n} x^n, \ \sum \frac{1}{n^2} x^n.$$

Dapatkan jari-jari konvergensi dari masing-masing deret. Apakah masing-masing deret konvergen di $x = 1$? Apakah masing-masing deret konvergen di $x = -1$?

Teorema 3.17 Integral Deret Pangkat

*Deret pangkat selalu konvergen ke suatu fungsi kontinu pada intreval konvergensi. Deret pangkat bisa **diintegralkan suku demi suku** pada interval tertutup dan terbatas yang termuat dalam interval konvergensi.*

Bukti. Jika $|x_0| < R$, maka berdasarkan Teorema 3.3.1 (teorem konvergen seragam pada deret pangkat) didapatkan bahwa $\sum a_n x^n$ konvergen seragam pada sebarang persekitaran tertutup terbatas dari x_0 yang termuat di dalam $(-R, R)$. Kekontinuan di x_0 didapatkan dari Teorema 3.3 (teorema deret fungsi kontinu) dan integral suku demi suku didapatkan dari Teorema 3.3 (teorema deret fungsi terintegral). ■

Teorema 3.18 Turunan Deret Pangkat

*Deret pangkat bisa **diturunkan suku demi suku** pada interval konvergensi, yaitu*

$$\text{Jika } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ maka } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ untuk } |x| < R.$$

Kedua deret mempunya radius konvergensi yang sama.

Bukti. Karena $\lim(n^{1/n}) = 1$, barisan $(|na_n|^{1/n})$ terbatas jika dan hanya jika barisan $(|a_n|^{1/n})$ terbatas.Lebih lanjut, amati bahwa

$$\limsup(|na_n|^{1/n}) = \limsup(|a_n|^{1/n}).$$

Oleh karena itu, dua deret $\sum |na_n|^{1/n}$ dan $\sum |a_n|^{1/n}$ mempunyai jari-jari konvergensi yang sama sehingga berdasarkan Teorema 3.3.1 (teorem konvergen seragam pada deret pangkat) didapatkan bahwa kedua deret konvergen seragam pada semua interval tertutup dan terbatas yang termuat pada jari-jari konvergensi. Selanjutnya dengan menerapkan Teorema 3.3, didapatkan $\sum(na_nx^{n-1})$ konvergen ke turunan dari f. ■

Perlu diperhatikan bahwa teorema tersebut tidak memberikan pernyataan tentang titik akhir interval konvergensi. Jika suatu deret konvergen pada suatu titik akhir, maka deret yang terdiferensiasi mungkin konvergen atau tidak konvergen pada titik tersebut. Misalnya, deret $\sum x^n/n^2$ konvergen di kedua titik ujung $x = -1$ dan $x = 1$. Namun, deret terdiferensiasi yang diberikan oleh $\sum x^{n-1}/n$ konvergen di $x = -1$ tetapi divergen di $x = 1$.

Teorema 3.19 Teorema Ketunggalan

Jika kedua deret $\sum a_nx^n$ dan $\sum b_nx^n$ konvergen ke fungsi f pada interval $(-r, r)$ dengan $r > 0$, maka

$$a_n = b_n \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

Bukti. $a_n = b_n$ didapat dari $n!a_n = f^{(n)}(0) = n!b_n$. ■

3.3.2 Latihan

1. Jika $\sum a_n$ merupakan deret konvergen mutlak, maka deret $\sum a_n \sin nx$ konvergen mutlak dan seragam.
2. Misalkan (c_n) adalah barisan bilangan positif yang menurun. Jika $\sum c_n \sin nx$ konvergen seragam, maka $\lim(nc_n) = 0$.
3. Tunjukkan bahwa jari-jari konvergensi R dari deret pangkat $\sum a_nx^n$ diberikan oleh $\lim(|a_n/a_{n+1}|)$ saat limit ini ada. Berikan contoh deret pangkat yang limitnya tidak ada.
4. Jika $0 < p \le |a_n| \le q$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, dapatkan radius konvergensi dari deret $\sum a_nx^n$.
5. Misal $f(x) = \sum a_nx^n$ untuk $|x| < R$. Jika $f(x) = f(-x)$ untuk semua $|x| < R$, tunjukkan bahwa $a_n = 0$ untuk semua n yang ganjil.

Bab 4 Pengantar Topologi

4.1 Himpunan Terbuka, Tertutup, dan Kompak

Definisi 4.1 Persekitaran

Persekitaran dari titik $x \in \mathbb{R}$ adalah sebarang himpunan V yang memuat suatu persekitaran-ε dari x untuk suatu $\varepsilon > 0$.

☞ **Catatan 4.1**
Untuk $\varepsilon > 0$, himpunan $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ adalah persekitaran dari titik x.

Definisi 4.2 Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

(i) Himpunan $G \subset \mathbb{R}$ disebut terbuka di $\mathbb{R}$ jika untuk setiap $x \in G$ ada persekitaran V dari x sedemikan sehingga $V \subseteq G$. (ii) Himpunan $F \subset \mathbb{R}$ disebut tertutup di $\mathbb{R}$ jika $F^c = \mathbb{R} \backslash F$ terbuka di $\mathbb{R}$.

☞ **Catatan 4.2**
ntuk menunjukkan bahwa $G \subseteq \mathbb{R}$ terbuka, cukup dengan menunjukkan bahwa setiap titik di G mempunyai persekitaran-ε yang termuat di G. Sedangkan, untuk menunjukkan bahwa $F \subseteq \mathbb{R}$ tertutup, cukup dengan menunjukkan bahwa F^c terbuka yakni setiap titik di F^c mempunyai persekitaran-ε yang termuat di F^c.

Contoh 4.1

Periksa apakah masing-masing himpunan berikut ini tertutup, terbuka atau bukan ked-uanya.

1. $\mathbb{R}$
2. $G := (0, 1)$
3. $I := (a, b)$
4. $J := [0, 1]$
5. $H = [0, 1)$
6. $\varnothing$

Proposisi 4.1 Sifat Himpunan Terbuka

(a) Gabungan dari sebarang (berhingga atau tak-berhingga) koleksi himpunan terbuka di $\mathbb{R}$ adalah terbuka. (b) Irisan dari koleksi berhingga himpunan terbuka di $\mathbb{R}$ adalah terbuka.

Bukti. Gunakan sifat himpunan dan definisi himpunan terbuka.

Catatan: Perhatikan bahwa $\cap_{n=1}^{\infty}(0, 1 + 1/n) = (0, 1]$. ■

Proposisi 4.2 Sifat Himpunan Tertutup

(a) Irisan dari sebarang (berhingga atau tak-berhingga) koleksi himpunan tertutup di $\mathbb{R}$ adalah tertutup. (b) Gabungan dari koleksi berhingga himpunan tertutup di $\mathbb{R}$ adalah tertutup.

Bukti. Gunakan definisi himpunan tertutup dan kemudian gunakan sifat himpunan terbuka.
Catatan: Perhatikan bahwa $\cup_{n=1}^{\infty}[0, 1 - 1/n] = [0, 1)$. ■

Teorema 4.1 Karakteristik Himpunan Tertutup

Jika $F \subseteq \mathbb{R}$, maka argumen di bawah ini ekivalen:

(i) *F tertutup di $\mathbb{R}$;*

(ii) *Jika $X = (x_n)$ adalah barisan di F yang konvergen, maka $\lim(x_n)$ berada di F.*

Bukti. (i) $\implies$ (ii) Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan elemen di F dan misalkan $x := \lim X$; akan ditunjukkan bahwa $x \in F$. Ini akan ditunjukkan secara kontradiksi, yaitu misalkan sebaliknya $x \in F^c$. Karena F^c terbuka dan $x \in F^c$, maka terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon(x)$ terdapat di dalam F^c. Karena $x = \lim(x_n)$, maka terdapat bilangan asli $K = K(\varepsilon)$ sehingga $x_K \in V_\varepsilon(x)$. Oleh karena itu haruslah $x_K \in F^c$; tetapi hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $x_n \in F$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, kita menyimpulkan bahwa $x \in F$.
(ii) $\implies$ (i) Akan ditunjukkan secara kontradiksi. Misalkan F tidak tertutup, sehingga $G := F^c$ tidak terbuka. Maka terdapat suatu titik $y_0 \in G$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $y^* \in V_\varepsilon(y_0)$ tetapi $y^* \in G^c = F$. Sekarang pilih $\varepsilon = 1/n$ dengan $n \in \mathbb{N}$, sehingga didapatkan $y_n \in V_\varepsilon(y_0)$ tetapi $y_n \in G^c = F$. Sekarang bisa diamati bahwa barisan (y_n) yang dikonstruksi di atas adalah barisan di F dan konvergen ke $y_0 \in F^c$. Hal ini kontradiksi dengan (ii). Sehingga haruslah F tertutup. ■

Recall: Titik x adalah titik klaster dari himpunan $F \subseteq A$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ persekitaran $V_\varepsilon(x)$ memuat titik di F selain x.

Teorema 4.2 Titik Klaster

Himpunan S tertutup di $\mathbb{R}$ jika dan hanya jika S memuat semua titik klasternya.

Bukti. Misalkan S adalah himpunan tertutup di $\mathbb{R}$ dan misalkan x adalah titik cluster dari S; kita akan menunjukkan bahwa $x \in S$. Dengan kontradiksi misal x termasuk dalam himpunan terbuka $x \in S^c$. Oleh karena itu terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon(x) \subseteq S^c$. Akibatnya $V_\varepsilon(x) \cap S = \varnothing$ yang bertentangan dengan asumsi bahwa x adalah titik cluster dari F.
Sebaliknya, misalkan S adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang berisi semua titik klasternya; kita akan menunjukkan bahwa S^c terbuka. Karena jika $y \in S^c$, maka y bukan merupakan

titik cluster dari S. Oleh karena itu terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon(y)$ tidak mengandung titik S (kecuali mungkin y). Namun karena $y \in S^c$, maka $V_\varepsilon(y) \subseteq S^c$. Karena y adalah elemen sembarang dari F^c, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap titik di F^c terdapat persekitaran-ε yang seluruhnya terdapat di F^c. Ini artinya F^c terbuka di $\mathbb{R}$ dan oleh karena itu F tertutup di $\mathbb{R}$. ■

Teorema 4.3 Karakteristik Himpunan Terbuka

impunan S terbuka di $\mathbb{R}$ jika dan hanya jika S merupakan gabungan dari interval terbuka di $\mathbb{R}$ yang saling asing dan banyaknya terhitung.

Bukti. Misalkan $G \neq 0$ merupakan himpunan terbuka di $\mathbb{R}$. Untuk setiap $x \in G$, misalkan $A_x := \{a \in \mathbb{R} : (a, x] \subseteq G\}$ dan misalkan $B_x := \{b \in \mathbb{R} : [x, b) \subseteq G\}$. Karena G terbuka, maka A_x dan B_x tidak kosong. Jika himpunan A_x terbatas di bawah, didefinisikan $a_x := \inf A_x$; jika A_x tidak terbatas di bawah, kita tetapkan $a_x := -\infty$. Perhatikan bahwa dalam kedua kasus $a_x \notin G$. Jika himpunan B_x terbatas di atas, maka ditetapkan $b_x := \sup B_x$; jika B_x tidak terbatas di atas, ditetapkan $b_x = +\infty$. Perhatikan bahwa dalam kedua kasus $b_x \notin G$.

Sekarang definisikan $I_x = (a_x, b_x)$. Bisa diamati bahwa I_x adalah interval terbuka yang memuat x. Kita klaim bahwa $I_x \subseteq G$. Untuk melihat ini, misalkan $y \in I_x$ dan ditentukan $y < x$. Ini mengikuti dari definisi a_x bahwa ada $a' \in A_x$ dengan $a' < y$ dan oleh karena itu $y \in (a', x] \subseteq G$. Demikian pula, jika $y \in I_x$ dan ditentukan $x < y$, maka ada $b' \in B_x$ dengan $y < b'$, maka $y \in [x, b') \subseteq G$. Karena $y \in I_x$ sebarang, kita mendapatkan $I_x \subseteq G$.

Karena x sebarang di G, dapat disimpulkan bahwa $\cup_{x\in G} I_x \subseteq G$. Sebaliknya, karena untuk setiap G terdapat interval terbuka I_x dengan $x \in I_x$, didapatkan $G \subseteq \cup_{x\in G} I_x$. Oleh karena itu kita simpulkan · $G = \cup_{x\in G} I_x$.

Sekarang klaim bahwa jika $x, y \in G$ dan $x \neq y$, maka $I_x = I_y$ atau $I_x \cap I_y = \varnothing$. Untuk membuktikan ini misalkan $z \in I_x \cap I_y$, dan diperoleh $a_x < z < b_y$ dan $a_y < z < b_x$. Akan ditunjukkan bahwa $a_x = a_y$. Jika tidak, maka dari Sifat Trikotomi dapat disimpulkan bahwa (i) $a_x < a_y$, atau (ii) $a_y < a_x$. Dalam kasus (i), didapatkan $a_y \in I_x = (a_x, b_x) \subseteq G$, yang bertentangan dengan fakta bahwa $a_y \notin G$. Demikian pula pada kasus (ii), didapatkan $a_x \in I_y = (a_y, b_y) \subseteq G$ yang bertentangan dengan fakta bahwa $a_x \notin G$. Oleh karena itu didapatkan $a_x = a_y$ dan dengan argumen yang serupa menyiratkan bahwa $b_x = b_y$. Oleh karena itu, bisa disimpulkan bahwa jika $I_x \cap I_y \notin \varnothing$ maka $I_x = I_y$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kumpulan interval-interval berbeda $\{I_x : x \in G\}$ terhitung. Caranya, dihitung himpunan $\mathbb{Q}$ dari bilangan rasional $Q = \{r_1, r_2, \cdots\}$. Berdasarkan Teorema kepadatan, didapatkan bahwa setiap interval I_x memuat bilangan rasional; sekarang pilih bilangan rasional di I_x yang memiliki indeks n terkecil dalam pencacahan $\mathbb{Q}$ ini, yakni dipilih $r_{n(x)} \in \mathbb{Q}$ sehingga $I_x = I_{r_{n(x)}}$ dan $n(x)$ adalah indeks terkecil n sehingga $I_{r_n} = I_x$. Jadi himpunan interval berbeda I_x, $x \in G$, dikorespondensikan dengan himpunan bagian dari $\mathbb{N}$. Oleh karena itu, himpunan interval berbeda ini dapat dihitung. ■

Definisi 4.3 Himpunan Cantor

Himpunan Cantor $\mathbb{F}$ adalah irisan dari himpunan F_n, $n \in \mathbb{N}$, dengan $F_0 = [0,1]$ dan F_n, $n = 1, 2, \cdots$, adalah himpunan di $\mathbb{R}$ yang diperoleh secara iteratif dengan menghapus sepertiga tengah terbuka dari masing-masing interval tertutup di F_{n-1}.

Karena $\mathbb{F}$ irisan dari himpunan tertutup, sehingga himpunan $\mathbb{F}$ tertutup. Selain itu $\mathbb{F}$ juga mempunyai sifat lainnya, yaitu

1. Total panjang interval terbuka yang dihapus adalah 1.
2. Himpunan Cantor $\mathbb{F}$ tidak memuat interval terbuka tak kosong.
3. Himpunan Cantor $\mathbb{F}$ adalah himpunan tak terhitung.

Definisi 4.4 *Cover* Terbuka

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. *Cover* terbuka dari A adalah koleksi $\mathcal{G} = \{G_\alpha : G_\alpha$ terbuka di $\mathbb{R}$ dan $\alpha \in I\}$ sehingga

$$A \subseteq \cup_{\alpha \in I} G_\alpha.$$

Jika $\mathcal{G}'$ subkoleksi dari $\mathcal{G}$ sehingga gabungan dari himpunan-himpunan di $\mathcal{G}'$ juga memuat A, maka $\mathcal{G}'$ disebut *cover* bagian dari $\mathcal{G}$. Lebih lanjut, jika anggota himpunan-himpunan $\mathcal{G}'$ berhingga maka $\mathcal{G}'$ disebut *cover* bagian berhingga.

☞ **Catatan 4.3**
Suatu himpunan mungkin mempunyai beberapa *cover* terbuka. Sebagai contoh, jika $A := [1, \infty)$, maka *cover* terbukanya adalah

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &= \{(0, \infty)\}, \\
\mathcal{G}_1 &= \{(r-1, r+1) : r \in \mathbb{Q}, r > 0\}, \\
\mathcal{G}_2 &= \{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{N}\}, \\
\mathcal{G}_3 &= \{(0, n) : n \in \mathbb{N}\}, \\
\mathcal{G}_4 &= \{(0, n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 23\}.
\end{aligned}$$

Definisi 4.5 Himpunan Kompak

Himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan kompak jika untuk setiap *cover* terbuka dari A mempunyai *cover* bagian berhingga. Dengan kata lain, untuk setiap *cover* terbuka $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ dari A, terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ sehingga

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} G_{\alpha_n}.$$

Dari Definisi himpunan kompak di atas, himpunan H dikatakan tidak kompak jika terdapat *cover* terbuka $\mathcal{G}$ dari H tetapi gabungan berhingga dari himpunan-himpunan di $\mathcal{G}$ tidak memuat H.

Dari contoh-contoh *cover* terbuka di atas, himpunan $A = [0, \infty)$ tidak kompak karena $\mathcal{G}_4$ adalah *cover* terbuka dari A akan tetapi untuk setiap $\{n_1, n_2, \cdots, n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ berlaku $A \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{k}(-\frac{1}{n_i}, n_i)$.

Contoh 4.2

Diketahui $K = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ merupakan himpunan bagian berhingga dari $\mathbb{R}$. Diberikan sebarang *cover* terbuka $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$. Untuk setiap $x_i, 1 \le i \le n$ berlaku

$$\begin{aligned} x_1 &\in G_{\alpha_1} \\ x_2 &\in G_{\alpha_2} \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_n &\in G_{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Akibatnya gabungan dari himpunan-himpunan di koleksi $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n}\}$ memuat K. Jadi, K kompak.

Teorema 4.4 Sifat Himpunan Kompak

Jika K kompak di $\mathbb{R}$, maka K tertutup dan terbatas.

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa K terbatas. Untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, misalkan $H_m := (-m, m)$. Karena setiap H_m terbuka dan karena $K \subseteq \cup_{m=1}^{\infty} H_m = \mathbb{R}$, bisa dilihat bahwa koleksi $\{H_m : m \in \mathbb{N}\}$ adalah *cover* terbuka dari K. Karena K kompak, koleksi ini memiliki *subcover* yang terbatas, sehingga terdapat $M \in \mathbb{N}$ sehingga

$$K \subseteq \cup_{m=1}^{M} H_m = H_M = (-M, M).$$

Oleh karena itu K terbatas, karena K termuat dalam interval berbatas $(-M, M)$.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa K tertutup, dengan menunjukkan bahwa komplemennya K^c terbuka. Untuk melakukannya, misalkan u sebarang di K^c dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $G_n := \{y \in \mathbb{R} : |y - u| > 1/n\}$. Bisa diperhatikan bahwa G_n terbuka untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $\mathbb{R}\backslash\{u\} = \cup_{n=1}^{\infty} G_n.$. Karena $u \notin K$, didapatkan $K \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} G_n$. Lebih lanjut, karena K kompak, diperoleh bahwa ada $m \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$K \subseteq \cup_{n=1}^{m} G_n = G_m.$$

Oleh karena itu $K \cap (u - 1/m, u + 1/m) = \varnothing$, sehingga interval $(u - 1/m, u + 1/m) = K^c$. Tapi karena u adalah titik sembarang di K^c, bisa disimpulkan bahwa K^c terbuka. ■

Teorema 4.5 Heine-Borel

Himpunan $K \subseteq \mathbb{R}$ kompak jika dan hanya jika tertutup dan terbatas.

Bukti. Telah ditunjukkan pada Teorema 4.1 bahwa himpunan kompak di $\mathbb{R}$ tertutup dan terbatas. Untuk membuktikan kebalikannya, misalkan K tertutup dan terbatas, dan misalkan $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ adalah *cover* terbuka dari K. Sekarang, akan ditunjukkan bahwa K terdapat dalam gabungan beberapa subkoleksi berhingga dari $\mathcal{G}$. Buktinya dilakukan secara kontradiksi. Misal diasumsikan bahwa:

$$K \text{ tidak terkandung dalam gabungan sejumlah himpunan berhingga di } \mathcal{G}. \tag{4.1}$$

Dari hipotesis, K terbatas, sehingga terdapat $r > 0$ sehingga $K \subseteq [-r, r]$. Misalkan $I_1 := [-r, r]$ dan bagi I_1 menjadi dua subinterval tertutup $I_1' := [-r, 0]$ dan $I_1'' := [0, r]$. Setidaknya salah satu dari dua himpunan bagian $K \cap I_1'$ dan $K \cap I_1''$ tidak kosong dan mempunyai sifat tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan di $\mathcal{G}$. [Sebab jika kedua himpunan $K \cap I_1'$ dan $K \cap I_1''$ termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan di $\mathcal{G}$, maka $K = (K \cap I_1') \cup (K \cap I_1'')$ termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan di $\mathcal{G}$, kontradiksi dengan asumsi (4.1).] Jika $K \cap I_1'$ tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan di $\mathcal{G}$, maka dimisalkan $I_2 = I_1'$; Selain itu jika $K \cap I_1''$ tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan di $\mathcal{G}$ maka dimisalkan $I_2 = I_1''$.

Sekarang bagi I_2 menjadi dua subinterval tertutup I_2' dan I_2''. Jika $K \cap I_2'$ tidak kosong dan tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan di $\mathcal{G}$, maka dimisalkan $I_3 := I_2'$; selain itu jika $K \cap I_2''$ tidak kosong dan tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan di $\mathcal{G}$, maka dimisalkan $I_3 := I_2''$.

Lanjutkan proses ini, diperoleh barisan interval bersarang (I_n). Berdasarkan Sifat Interval Bersarang, terdapat sebuah titik z yang terdapat di semua I_n, $n \in \mathbb{N}$. Karena setiap interval I_n memuat sebanyak tak-berhingga titik di K, sehingga didapat titik z adalah titik klaster dari K . Selain itu, karena K diasumsikan tertutup, didapat $z \in K$. Oleh karena itu ada himpunan G_λ di $\mathcal{G}$ dengan $z \in G_\lambda$. Karena G_λ terbuka, didaptakan bahwa ada $\varepsilon > 0$ sehingga

$$(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subseteq G_\lambda.$$

Sebaliknya, karena interval I_n diperoleh melalui pembagian dua dari $I_1 = [-r, r]$, didapatkan panjang I_n adalah $r/2^{n-2}$. Oleh karena itu, jika n sangat besar sehingga $r/2^{n-2} < \varepsilon$ dan $I_n \subseteq (z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subseteq G_\lambda$. Tetapi ini berarti bahwa jika n diambil sedemikian sehingga $r/2^{n-2} < \varepsilon$, maka $K \cap I_n$ termuat dalam himpunan tunggal G_λ di $\mathcal{G}$. Ini kontradiksi dengan konstruksi dari I_n. Kontradiksi ini menunjukkan bahwa asumsi (4.1) tidak benar, sehingga dapat disimpulkan bahwa K kompak. ∎

Teorema 4.6

Himpunan $K \subseteq \mathbb{R}$ kompak jika dan hanya jika setiap barisan di K mempunya sub-barisan yang konvergen ke titik di K.

Bukti. Misalkan K kompak dan misalkan (x_n) suatu barisan dengan $x_n \in K$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Teorema Heine-Borel, himpunan K terbatas sehingga barisan (x_n) juga terbatas; berdasarkan Teorema Bolzano-Weierstrass, terdapat subbarisan (x_{n_k}) yang konvergen. Karena K tertutup, didapat limit $x := \lim(xn()$ di K. Jadi setiap barisan di K mempunyai subbarisan yang konvergen ke suatu titik di K.

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa jika K tidak tertutup atau tidak terbatas, maka pasti ada barisan di K yang tidak mempunyai subbarisan yang konvergen ke titik di K. Pertama, jika K tidak tertutup, maka ada a titik cluster c dari K yang bukan di K. Karena c adalah titik klaster dari K, maka terdapat barisan (x_n) dengan $x_n \in K$ dan $x_n \neq c$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\lim(x_n) = c$. Kemudian setiap subbarisan (x_n) juga konvergen ke c, dan karena $c \neq K$, diapatkan bahwa tidak ada subbarisan yang konvergen ke titik di K.

Kedua, jika K tidak terbatas, maka ada barisan (x_n) di K sehingga $|x_n| > n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Sehingga, setiap subbarisan (x_n) tidak berbatas, dan berimplikasi tidak ada subbarisan yang konvergen ke titik di K. ■

4.1.1 Latihan

1. Tunjukkan bahwa himpunan $\mathbb{N}$ tertutup di $\mathbb{R}$.
2. Tunjukkan bahwa $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ bukan himpunan tertutup tetapi $A \cup \{0\}$ himpunan tertutup.
3. Tunjukkan bahwa jika G himpunan terbuka dan F himpunan tertutup, maka $G \backslash F$ himpunan terbuka dan $F \backslash G$ himpunan tertutup.
4. Tunjukkan bahwa himpunan $G \subseteq \mathbb{R}$ terbuka jika dan hanya jika tidak memuat titik batasnya.
5. Tunjukkan bahwa himpunan $F \subseteq \mathbb{R}$ tertutup jika dan hanya jika ia memuat semua titik batasnya.
6. Dapatkan *cover* terbuka dari interval $(1, 2]$ yang tidak punya *subcover* yang berhingga.
7. Dapatkan *cover* terbuka dari $\mathbb{N}$ yang tidak punya *subcover* yang berhingga.
8. Dapatkan *cover* terbuka dari $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ yang tidak punya *subcover* yang berhingga.
9. Buktikan menggunakan definisi kompak bahwa jika F adalah himpunan bagian dari himpunan kompak K di $\mathbb{R}$ dan F tertutup, maka F kompak.
10. Buktikan menggunakan definisi kompak bahwa jika K_1 dan K_2 himpunan kompak di $\mathbb{R}$, maka $K_1 \cup K_2$ kompak.

4.2 Ruang Metrik

Definisi 4.6 Ruang Metrik

Diberikan sebarang himpunan tak kosong X. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat

M1. $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$ (kepositifan)

M2. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ (definit positif)

M3. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$ (simetris)

M4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (Ketaksamaan segitiga)

disebut metrik pada X. Pasangan (X, d) disebut dengan ruang metrik.

Contoh 4.3

- $d(x,y) = |x - y|$ untuk $x, y \in \mathbb{R}$.
- $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1^2 + y_2^2)}$, untuk $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
- $d_1(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, untuk $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
- $d_\infty(P_1, P_2) = \sup\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, untuk $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
- $d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$, untuk f dan g fungsi kontinu pada interval $[0,1]$ ke $\mathbb{R}$.
- $d_1(f,g) = \int_0^1 |f - g|$, untuk f dan g fungsi kontinu pada interval $[0,1]$ ke $\mathbb{R}$.
- Misal S himpunan tak-kosong.

$$d(s,t) := \begin{cases} 0 & \text{jika } s = t \\ 1 & \text{jika } s \neq t. \end{cases}, \text{ untuk } s, t \in S.$$

Definisi 4.7 Persekitaran

Misal (S, d) ruang metrik. Untuk $\varepsilon > 0$, persekitaran-ε dari titik x_0 di S adalah himpunan

$$V_\varepsilon(x_0) := \{x \in S : d(x_0, x) < \varepsilon\}.$$

Persekitaran dari x_0 adalah sebarang himpunan U yang memuat persekitaran-ε dari x_0 untuk suatu $\varepsilon > 0$.

Definisi 4.8 Konvergensi

Misal (x_n) barisan di ruang metrik (S, d). Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in S$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x_n \in V_\varepsilon(x)$ untuk semua $n \geq K$.

Catatan: Karena $x_n \in V_\varepsilon(x)$ jika dan hanya jika $d(x_n, x) < \varepsilon$. Oleh karena itu, barisan

(x_n) dikatakan konvergen ke x jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$. Dengan kata lain, barisan (x_n) di (S, d) konvergen ke x jika dan hanya jika barisan bilangan real $(d(x_n, x))$ konvergen ke nol.

Contoh 4.4

Diberikan $\mathbb{R}^2$ dengan metrik $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1^2 + y_2^2)}$, untuk $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Jika $(P_n) = (x_n, y_n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka dapat dinyatakan bahwa barisan (P_n) konvergen ke $P = (x, y)$ terhadap metrik ini jika dan hanya jika barisan bilangan real (x_n) dan (y_n) masing-masing konvergen ke x dan y.

Definisi 4.9 Barisan Cauchy

Misal (S, d) ruang metrik. Barisan (x_n) di S dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $H \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk semua $n, m \geq H$.

Definisi 4.10

Ruang metrik (S, d) dikatakan komplit jika semua barisan Cauchy di S konvergen ke suatu titik di S.

Contoh 4.5

- Ruang $C[0, 1]$ dengan metric d_∞ adalah ruang yang lengkap.
- Ruang $C[0, 1]$ dengan metric d_1 adalah ruang yang tidak lengkap.

Definisi 4.11 Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

Misal (S, d) ruang metrik. Himpunan bagian G dari S dikatakan himpunan terbuka di S jika untuk setiap titik $x \in S$ ada persekitaran U dari x sedemikian sehingga $U \subseteq G$. Himpunan bagian F dari S dikatakan himpunan tertutup di S jika $F^c = S \backslash F$ himpunan terbuka di S.

Definisi 4.12

Misal (S_1, d_1) dan (S_2, d_2) ruang metrik dan misal $f : S_1 \to S_2$ adalah fungsi dari S_1 ke S_2. Fungsi f dikatakan kontinu di titik c di S_1 jika untuk setiap persikataran-ε dari $f(c)$ ada persekitaran-δ dari c sedemikian sehingga jika $x \in V_\delta(c)$ maka $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$.

☞ **Catatan 4.4**
Formulasi $\varepsilon - \delta$ dari kekontinuan bisa dituliskan sebagai berikut: $f : S_1 \to S_2$ kontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_1(x, c) < \delta$ berakibat $d_2(f(x), f(c)) < \varepsilon$.

Teorema 4.7 Kontinu Global

Jika (S_1, d_1) dan (S_2, d_2) ruang metrik, maka fungsi $f : S_1 \to S_2$ kontinu pada S_1 jika dan hanya jika $f^{-1}(G)$ terbuka di S_1 saat G terbuka di S_2.

☞ **Catatan 4.5**

Ruang metrik (S, d) dikatakan kompak jika untuk setiap *cover* terbuka dari S mempunyai berhingga *subcover*.

Teorema 4.8 Mempertahankan Kekompakan

Jika (S, d) ruang metrik yang kompak dan jika $f : S \to \mathbb{R}$ kontinu, maka $f(S)$ kompak di $\mathbb{R}$.

Definisi 4.13 Semimetrik

Semimetrik pada himpunan S adalah fungsi $d : S \times S \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi (M1), (M3) dan (M4) dari definisi metrik dan

$$d(x, y) = 0 \text{ jika } x = y.$$

Ruang semimetrik (S, d) adalah himpunan S bersama dengan semimetrik d pada S.

4.2.1 Latihan

1. Tunjukkan bahwa himpunan $\mathbb{N}$ tertutup di $\mathbb{R}$.
2. Tunjukkan bahwa $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ bukan himpunan tertutup tetapi $A \cup \{0\}$ himpunan tertutup.
3. Tunjukkan bahwa jika G himpunan terbuka dan F himpunan tertutup, maka $G \backslash F$ himpunan terbuka dan $F \backslash G$ himpunan tertutup.
4. Tunjukkan bahwa himpunan $G \subseteq \mathbb{R}$ terbuka jika dan hanya jika tidak memuat titik batasnya.
5. Tunjukkan bahwa himpunan $F \subseteq \mathbb{R}$ tertutup jika dan hanya jika ia memuat semua titik batasnya.
6. Dapatkan *cover* terbuka dari interval $(1, 2]$ yang tidak punya *subcover* yang berhingga.
7. Dapatkan *cover* terbuka dari $\mathbb{N}$ yang tidak punya *subcover* yang berhingga.
8. Dapatkan *cover* terbuka dari $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ yang tidak punya *subcover* yang berhingga.
9. Buktikan menggunakan definisi kompak bahwa jika F adalah himpunan bagian dari himpunan kompak K di $\mathbb{R}$ dan F tertutup, maka F kompak.
10. Buktikan menggunakan definisi kompak bahwa jika K_1 dan K_2 himpunan kompak di $\mathbb{R}$, maka $K_1 \cup K_2$ kompak.