Aljabar Linear Elementer:

Menjembatani Teori Klasik dan Realitas Komputasi AI

Subiono



2026

Nemanasi Sains
NESA

Aljabar Linear Elementer: Menjembatani Teori Klasik dan Realitas Komputasi AI

Subiono



Subiono — Email: subiono@its.ac.id

Alamat: Subiono
Departemen Matematika-ITS
Indonesia

Nemanasi Sains
NESA

Aljabar Linear Elementer

Menjembatani Teori Klasik dan Realitas Komputasi AI

Penulis

Subiono — Email: subiono2008@matematika.its.ac.id

Alamat: Departemen Matematika

Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Sukolilo Surabaya, 60111

Indonesia

ISBN: ISBN 978-634-05-6442-6

Editor:
Kistosil Fahim

Penyunting:
Aminatu Zuhriah

Desain Sampul dan Tata Letak:
Achmet Usman Ali

Penerbit:
CV. Nemanasi Sains

Redaksi dan Distributor Tunggal:
CV. Nemanasi Sains
Perum Bumi Wonorejo Asri 1/25 Blok B2 No. 15,
Desa/Kelurahan Wonorejo, Kec. Rungkut,
Kota Surabaya, Provinsi Jawa Timur, Kode Pos 60296
Indonesia

Terbitan Pertama, September 2026
514 halaman, 21 x 29, 7 cm
Copyright © CV. Nemanasi Sains, 2026

Kata Pengantar

Alhamdulillahirabbilalamin, segala puji hanyalah milikmu ya Allah yang telah meberikan "kebebasan bertanggung jawab" kepada manusia untuk suatu kebaikan dalam melaksanakan amanatnya di hamparan bumi yang dihuni manusia. Sholawat dan Salam kepadamu ya Nabi Muhammad beserta para keluarganya dan para pengikutnya sampai nanti di hari akhir.

Buku ini disusun dengan maksud untuk digunakan sebagi buku referensi mata kuliah **Aljabar Linear Elementer**, dimulai Bab 1 sampai Bab 4. Materi disusun untuk kebutuhan struktur dalam Era kekinian **AI** dan **Komputasi Awan**. Selain dari pada itu materi dari buku ini disusun supaya pengguna yang lainnya bisa memanfaatkan buku ini sesuai dengan yang dibutuhkannya.

Dalam buku ini diberikan beberapa konsep pengertian dari materi yang disajikan setelah itu diikuti dengan beberapa contoh untuk mempermudah pemahaman, selain itu juga diberikan beberapa contoh aplikasi yang mungkin dan beberapa soal sebagai latihan. Penulis menyediakan "**BiMath: EduForum AI (Multi-User + Voice + Google Translate)**" untuk mendiskusikan segala permasalah dari **Aljabar Linier Elementer** di

https://subiono2021.github.io/ForumQA/

silahkan dicoba! Dalam forum disediakan juga **komputasi awan** menggunakan SageMath. Selain itu untuk keperluan proses pembelajaran berbasis web interaktif di era AI anda dapat mengakses di

https://subiono2021.github.io/ALE-dan-Komputasinya/

Penulis pada kesempatan ini menyampaikan keaktifan pembaca dalam mengkaji buku ini untuk menyampaikan kritik dan saran guna perbaikan buku ini, sehingga pada versi yang mendatang "mutu buku" yang baik bisa dicapai. Kritik dan saran ini sangat penting karena selain alasan yang telah disebutkan tadi, penulis percaya bahwa dalam sajian buku ini masih kurang

dari sempurnah bahkan mungkin ada suatu kesalahan dalam sajian buku ini baik dalam bentuk redaksional, pengetikan dan materi yang menyebabkan menjadi suatu bacaan kurang begitu bagus. Kritik dan saran bisa disampaikan ke alamat email : subiono@its.ac.id

Penulis menuangkan pemikirannya ke dalam buku ini berdasarkan "kebebasan menulis" dengan asas "kemanfaatan" menggunakan media yang tersaji masa kini. Beberapa alat bantu untuk penulisan buku ini juga didapat secara gratis, yaitu perangkat lunak LaTeX dan Texstudio sebagai salah satu media LaTeX editor. Beberapa gambar yang ada dalam buku ini menggunakan perangkat lunak LaTexDraw yang juga didapat secara gratis. Begitu juga beberapa bahan rujukan didapat secara gratis lewat internet. Selain itu untuk menyelesaikan beberapa contoh yang dibahas digunakan alat bantu perangkat lunak SageMath, perangkat lunak ini juga didapat dari internet secara gratis. Selain itu, sebagian materi yang tersaji didapat dari diskusi penulis dengan **AI**: **DeepSeek**, **ChatGPT**, **Gemini-Google** dan **Meta AI**.

Akhirnya, dengan segala kerendahan hati penulis memohon kepada Allah semoga penulisan ini bisa berlanjut untuk versi mendatang yang tentunya lebih "baik" dari Versi yang tersedia saat ini dan semoga benar-benar buku yang tersaji ini bermanfaat bagi pembaca.

Surabaya, 3 Agustus 2026
Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar iii

Daftar Isi v

1 Pengenalan Vektor 1

1.1 Vektor di $\mathbb{R}^n$ . . . 6
1.2 Soal Masalah Nyata (Real Problems) dan Pembahasan . . . 38
1.3 Hasil kali dalam (Perkalian Titik), Norm atau Panjang vektor . . . 55
1.3.1 Sudut diantara dua vektor . . . 67
1.3.2 Proyeksi . . . 75
1.4 Soal Masalah Nyata (Real Problems) dan Pembahasan . . . 79
1.5 Proses Gram-Schmidt . . . 88
1.6 Aplikasi Masalah Nyata (Real Problem) . . . 91
1.7 Reduksi Dimensi dengan Proses Gram-Schmidt . . . 94
1.8 Latihan Masalah Nyata (HOTS) dan Pembahasan . . . 100
1.9 Hasil Perkalian Silang . . . 112
1.9.1 Sistem vektor tangan-kanan . . . 113
1.9.2 Deskripsi geometris dari perkalian silang . . . 113
1.9.3 Perkalian Kotak . . . 118
1.10 Masalah Nyata (HOTS) - Hasil Perkalian Silang . . . 122
1.11 Himpunan Pembentang dan Bebas Linier . . . 135
1.11.1 Himpunan Pembentang dan Bentangan . . . 137
1.11.2 Bebas Linier . . . 144
1.12 Masalah Nyata (HOTS) - Himpunan Pembentang dan Bebas Linier . . . 151
1.13 Basis . . . 171
1.13.1 Koordinat dan Perubahan basis . . . 181
1.14 Pembahasan Soal-soal bernalar HOTS . . . 183

1.15 Ruang Bagian 195
1.16 Soal Real Problem dan Pembahasan: Ruang Bagian 200
1.17 Ringkasan 212

2 Sistem Persamaan Linear **215**
2.1 Geometri Sistem Persamaan linier di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ 217
2.2 Matriks dan Bentuk Eselon 230
2.2.1 Koefisien Matriks 230
2.2.2 Operasi Baris Elementer (OBE) 233
2.2.3 Eleminasi Gauss 251
2.3 Aplikasi 265
2.3.1 Menyeimbangkan reaksi kimia 266
2.3.2 Variabel tak berdimensi 268
2.3.3 Jaringan resistor 270

3 Aljabar Matriks **279**
3.1 Aritmetika dan Operasi Matriks 282
3.1.1 Penambahan, Pengurangan Matriks dan Perkalian Matriks 282
3.2 Matriks Invers dan Matriks Elementer 300
3.3 Faktorisasi LU 312
3.3.1 Aplikasi *LU* dan *PLU* 323
3.4 Ringkasan 339

4 Nilai Eigen, Vektor Eigen dan Pendiagonalan **343**
4.1 Determinan 345
4.1.1 Aturan Cramer 364
4.2 Contoh-contoh Aplikasi 367
4.3 Determinan dan Geometri 379
4.4 Perhitungan Determinan Secara Manual 387
4.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen 397
4.6 Matriks Similar dan Diagonalisasi 429
4.7 Multiplisitas Aljabar dan Geometri dari Nilai Eigen 446
4.8 Diagonalisasi Matriks Simetri real 452
4.9 Teorema Cayley-Hamilton (Tinjauan Pertama) = Polinomial Minimal 463
4.10 Contoh-contoh Aplikasi Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Era AI 474
4.11 Rangkuman 505

Daftar Pustaka **509**

Indeks **511**

Bio Data Penulis **511**

Aljabar Linear Elementer: Menjembatani Teori Klasik dan Realitas Komputasi AI

Buku teks ini disusun sebagai buku referensi utama untuk mata kuliah **Aljabar Linear Elementer**, yang mencakup pembahasan sistematis mulai dari Bab 1 hingga Bab 4. Di tengah pesatnya perkembangan teknologi, buku ini hadir untuk memenuhi kebutuhan struktur keilmuan dalam **Era Kecerdasan Buatan (AI)** dan **Komputasi Awan**, di mana aljabar linear berperan sebagai bahasa fundamental dalam pengolahan data dan algoritma cerdas.

Pembahasan dalam buku ini dirancang untuk menjembatani teori matematika klasik dengan realitas komputasi modern. Materi yang disajikan mencakup prinsip-prinsip dasar aljabar yang menjadi fondasi bagi pemahaman struktur yang lebih kompleks. Untuk memperkuat aspek praktis dan memberikan pengalaman belajar yang lebih kontekstual, beberapa pembahasan dan contoh soal disertai dengan implementasi komputasi menggunakan **SageMath versi 9.3**. Hal ini diharapkan dapat membantu mahasiswa tidak hanya memahami estetika logika matematika, tetapi juga terampil dalam mengoperasikan alat komputasi yang relevan di dunia industri saat ini.

Struktur buku ini disusun dengan urutan yang memudahkan proses belajar mandiri maupun formal. Isi bahasan dimulai dengan pendahuluan yang meletakkan dasar-dasar teoretis yang akan digunakan secara konsisten pada bab-bab berikutnya. Fokus utama buku ini adalah membangun nalar (Bina Nalar) mahasiswa melalui penyajian konsep dan sifat-sifat materi yang selalu didahului dengan contoh-contoh konkret. Dengan pendekatan ini, pengertian abstrak dalam aljabar linear menjadi lebih mudah dipahami dan diaplikasikan.

Buku ini menekankan aspek formal matematika sekaligus aplikasi praktisnya di berbagai bidang, dilengkapi latihan komprehensif di setiap topik. Disajikan dengan ketajaman akademis tinggi namun tetap inklusif bagi lintas disiplin, keseimbangan antara teori murni dan aplikasi praktis memungkinkan peminat matematika menikmati kedalaman teorinya, sekaligus menjadi panduan esensial bagi praktisi dalam menyelesaikan masalah nyata di era digital.

Nemanasi Sains
NESA

ISBN 978-634-05-6442-6
9 786340 564426